

上限・下限 ～定義・イメージ・例を解説～

MathAbyss

目次

1	上限・下限の定義	2
2	上限・下限のイメージ・例・意義	3
3	関連内容	5
3.1	上限・下限の一意性	5
4	上限・下限と最大値・最小値	6
4.1	上限・下限に似た概念	7
5	参考文献	7
5.1	書籍	7
5.2	PDF ファイル	8
5.3	Web サイト	8

上限とは、上界の最小値のことです。

下限とは、下界の最大値のことです。

A を \mathbb{R} の空でない部分集合とし、 A の上界全体の集合を $U(A)$ 、下界全体の集合を $L(A)$ とする。 $U(A)$ に最小値 α が存在するとき、 α を A の上限 (supremum) (または最小上界 (least upper bound)) といい、 $\sup A$ (または $\text{lub } A$) で表す。また、 $L(A)$ に最小値 β が存在するとき、 β を A の下限 (infimum) (または最大下界 (greatest lower bound)) といい、 $\inf A$ (または $\text{glb } A$) で表す。

元記事の URL: <https://mathabyss.com/supremum-infimum>

1 上限・下限の定義

上限・下限の厳密な定義は次のようになります。

定義 1

A を \mathbb{R} の空でない部分集合とし、 A の上界全体の集合を $U(A)$ 、下界全体の集合を $L(A)$ とする。 $U(A)$ に最小値 α が存在するとき、 α を A の上限 (supremum) (または最小上界 (least upper bound)) といい、 $\sup A$ (または $\text{lub } A$) で表す。また、 $L(A)$ に最小値 β が存在するとき、 β を A の下限 (infimum) (または最大下界 (greatest lower bound)) といい、 $\inf A$ (または $\text{glb } A$) で表す。

\mathbb{R} 上の上限・下限を一般化した概念は、順序集合の上限・下限にあたる。これについては集合論の記事に譲ることにし、ここでは解析学の立場から \mathbb{R} 上の上限・下限を考えるものとする。

さて、上の定義を論理式を用いて表してみよう。空でない $A \subset \mathbb{R}$ に対し、 A の上限 α と下限 β は、どのような条件を満たすだろうか。

まず、上限と下限は、それぞれ上界・下界の 1 つであるから、以下が成り立つ。

$$\forall x \in A, x \leq \alpha$$

$$\forall x \in A, \beta \leq x$$

また、上限 α は上界の最小値であるから、 α よりも小さい全ての実数は A の上界でない。「 α よりも小さい全ての実数」は、 ε を任意の正の実数とすることにより、 $\alpha - \varepsilon$ と表すことができる。つまり、上の上界の定義を否定することにより

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \alpha - \varepsilon < x$$

同様に、下限 β は下界の最小値であるから、 β よりも大きい全ての実数は B の下界でない。「 β よりも大きい全ての実数」は、任意の $\varepsilon > 0$ を用いて $\beta + \varepsilon$ と表すことができる。つまり、上の下界の定義を否定することにより

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, x < \beta + \varepsilon$$

まとめると、次のようになる。

$$\alpha = \sup A \stackrel{\text{def}}{\iff} [[\forall x \in A, x \leq \alpha] \wedge [\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \alpha - \varepsilon < x]]$$

$$\beta = \inf A \stackrel{\text{def}}{\iff} [[\forall x \in A, \beta \leq x] \wedge [\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, x < \beta + \varepsilon]]$$

上限・下限であることは、上の論理式に従って証明する場合が多い。

そして、 A に最大値や最小値が存在するとき、その値はそれぞれ A の上限・下限でもある。これについては後述する。

2 上限・下限のイメージ・例・意義

具体的な \mathbb{R} の空でない部分集合を通して、上界・下界を確認しよう。

以下、 \mathbb{R} の区間の上限・下限を考えることにする。区間についての詳細は別の記事を参照するとよい。

また、 \mathbb{R} の区間の上界・下界についても、別の記事で詳しく解説している。合わせて参照するとよい。

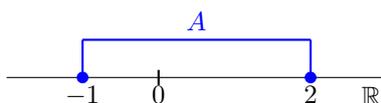


図 1

まず、 $A = [-1, 2] = \{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$ とおく。 A の上界全体の集合を $U(A)$ 、下界全体の集合を $L(A)$ とすると、 $U(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$ であり、 $L(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$ である。

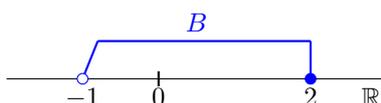


図 2

次に、 $B = (-1, 2] = \{x \mid -1 < x \leq 2\}$ とおく。 B の上界全体の集合を $U(B)$ 、 B の下界全体の集合を $L(B)$ とすると、 $U(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$ であり、 $L(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$ である。

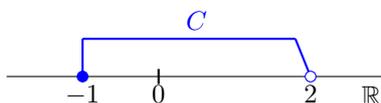


図 3

さらに、 $C = [-1, 2) = \{x \mid -1 \leq x < 2\}$ とおく。 C の上界全体の集合を $U(C)$ 、 C の下界全体の集合を $L(C)$ とすると、 $U(C) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$ であり、 $L(C) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$ である。

そして、 $D = (-1, 2) = \{x \mid -1 < x < 2\}$ とおく。 D の上界全体の集合を $U(D)$ 、 D の下界全体の集合を $L(D)$ とすると、 $U(D) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$ であり、 $L(D) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$ である。

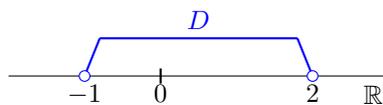


図 4

以上より、 A, B, C, D の上界全体の集合と下界全体の集合がすべて等しいことが分かる。よって、 A, B, C, D には上限及び下限が存在する。 A, B, C, D の上限は $U(A), U(B), U(C), U(D)$ の最小値で、 $\sup A = \sup B = \sup C = \sup D = 2$ である。また、 A の下限は $L(A), L(B), L(C), L(D)$ の最大値で、 $\inf A = \inf B = \inf C = \inf D = -1$ である。

また、次のような集合の場合も、同様に上限・下限の存在性を確認することができる。

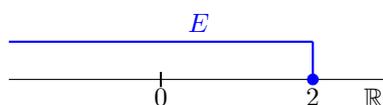


図 5

$E = (-\infty, 2] = \{x \mid x \leq 2\}$ の上界全体の集合を $U(E)$ とすると、 $U(E) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$ である。よって、 E に上限が存在し、 $\sup E = 2$ である。また、 E の下界は存在しないから、 E の下限も存在しない。

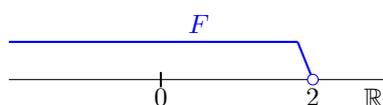


図 6

$F = (-\infty, 2) = \{x \mid x < 2\}$ の上界全体の集合を $U(F)$ とすると、 $U(F) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$ である。よって、 F に上限が存在し、 $\sup F = 2$ である。また、 F の下界は存在しないから、 F の下限も存在しない。

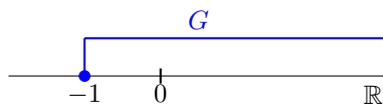


図 7

$G = [-1, \infty) = \{x \mid x \geq -1\}$ の下界全体の集合を $L(G)$ とすると、 $L(G) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$ である。よって、 G に下限が存在し、 $\inf G = -1$ である。また、 G の上界は存在しないから、 G の上限も存在しない。

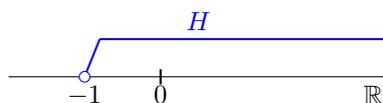


図 8

$H = (-1, \infty) = \{x \mid x > -1\}$ の下界全体の集合を $L(H)$ とすると、 $L(H) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$ である。よって、 H に下界が存在し、 $\inf H = -1$ である。また、 H の上界は存在しないから、 H の上限も存在しない。

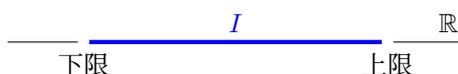


図 9

まとめると、空でない \mathbb{R} の部分集合 I に対し、 I の上限及び下限が存在するならば、それは上図のようになる。もちろん、 I が一つの繋がった区間を表していたり、一つの繋がった区間が複数合わさった集合を表していたりすることに注意が必要である。

3 関連内容

3.1 上限・下限の一意性

上限・下限が複数存在することはない。当たり前を感じるかもしれないが、数学において、このような一意性は非常に重要である。ここでは、その厳密な証明を与えることとする。

命題 1

A を \mathbb{R} の空でない部分集合とする。

- (1) A に上限が存在するとき、 A の上限は一意的である。
- (2) A に下限が存在するとき、 A の下限は一意的である。

証明)

(1) α, β を A の上限とする.

$\alpha < \beta$ のとき, 定義より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $a \in A$ が存在し

$$\alpha - \varepsilon < \beta - \varepsilon < a \leq \alpha < \beta$$

ここで, $\varepsilon = \beta - \alpha > 0$ とおくと $\beta - \varepsilon < a \leq \alpha$ より $\alpha < a \leq \alpha$, すなわち $\alpha < \alpha$ となり矛盾.

よって, $\alpha \geq \beta$

同様に, $\alpha > \beta$ のときも矛盾するから¹⁾, $\alpha = \beta$

(2) α, β を A の下限とする.

$\alpha < \beta$ のとき, 定義より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $a \in A$ が存在し

$$\alpha < \beta \leq a < \alpha + \varepsilon < \beta + \varepsilon$$

ここで, $\varepsilon = \beta - \alpha > 0$ とおくと $\beta \leq a < \alpha + \varepsilon$ より $\beta \leq a < \beta$, すなわち $\beta < \beta$ となり矛盾.

よって, $\alpha \geq \beta$

同様に, $\alpha > \beta$ のときも矛盾するから, $\alpha = \beta$

■

4 上限・下限と最大値・最小値

最大値・最小値が, それぞれ上限・下限になりうることは, 先に述べたが, ここではその証明を与えることにする.

命題 2

A を \mathbb{R} の空でない部分集合とする.

(1) A に最大値 $\max A$ が存在するとき, $\max A$ は A の上限である.

(2) A に最小値 $\min A$ が存在するとき, $\min A$ は A の下限である.

証明)

(1) 最大値の定義より, 任意の $x \in A$ に対し, $x \leq \max A$

また, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\max A - \varepsilon < \max A$

$\max A \in A$ であるから, 定義より, $\max A$ は A の上限である.

(2) 最小値の定義より, 任意の $x \in A$ に対し, $\min A \leq x$

また, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\min A < \min A + \varepsilon$

$\min A \in A$ であるから, 定義より, $\min A$ は A の下限である.

■

1) α と β の対称性から, $\alpha < \beta$ の場合で, α と β を入れ替えればよい.

最大値・最小値が、それぞれ上界・下界の1つであることは、別の記事で証明している。上の命題は、この命題のより強いものになっていることが分かる。

4.1 上限・下限に似た概念

上限・下限に似た概念として、次のようなものがある。上限・下限との違いを認識する必要がある。

定義 2

A を \mathbb{R} の空でない部分集合とする。ある $M \in A$ が存在し、任意の $x \in A$ に対し、 $x \leq M$ となるとき、 M を A の最大値 (maximum) という。また、ある $m \in A$ が存在し、任意の $x \in A$ に対し、 $m \leq x$ となるとき、 m を A の最小値 (minimum) という。

定義 3

A を \mathbb{R} の空でない部分集合とする。ある $M \in \mathbb{R}$ が存在し、任意の $x \in A$ に対し、 $x \leq M$ となるとき、 M を A の上界 (upper bound) という。また、ある $m \in \mathbb{R}$ が存在し、任意の $x \in A$ に対し、 $m \leq x$ となるとき、 m を A の下界 (lower bound) という。

それぞれ記事を公開しているため、合わせて参照するとよい。

また、関数の極大値・極小値については、別の記事を参照するとよい。

5 参考文献

この記事を含め、「微分積分学」のカテゴリに属する記事は、以下の書籍・PDF ファイル・Web サイトを参考文献としています (それぞれの記事について、以下に掲載していない参考文献がある場合は、「追記」として逐一掲載しています)。

5.1 書籍

- 杉浦光夫, 『解析入門 I』, 基礎数学 2, 東京大学出版会, 1980 年.
- 杉浦光夫, 『解析入門 II』, 基礎数学 3, 東京大学出版会, 1985 年.
- 杉浦光夫, 清水英男, 金子晃, 岡本和夫, 『解析演習』, 基礎数学 7, 東京大学出版会, 1989 年.
- 高木貞治, 『定本 解析概論』, 岩波書店, 2010 年.
- 松坂和夫, 『解析入門 上』, 松坂和夫 数学入門シリーズ, 新装版, 岩波書店, 2018 年.
- 松坂和夫, 『解析入門 中』, 松坂和夫 数学入門シリーズ, 新装版, 岩波書店, 2018 年.
- 松坂和夫, 『解析入門 下』, 松坂和夫 数学入門シリーズ, 新装版, 岩波書店, 2018 年.
- 藤岡敦, 『手を動かしてまなぶ ε - δ 論法』, 裳華房, 2021 年.
- 藤岡敦, 『手を動かしてまなぶ 微分積分』, 裳華房, 2019 年.

- 志賀浩二, 『微分・積分 30 講』, 数学 30 講シリーズ 1, 朝倉書店, 1988 年²⁾.
- 齋藤正彦, 『齋藤正彦 微分積分学』, 東京図書, 2006 年.
- 加藤文元, 『大学教養 微分積分』, 数研講座シリーズ, 数研出版, 2019 年.
- 『大学教養 微分積分』, 加藤文元 (監修), 数研出版編集部 (編著), チャート式シリーズ, 数研出版, 2019 年.
- 小寺平治, 『明解演習 微分積分』, 明解演習シリーズ 2, 共立出版, 1984 年.

5.2 PDF ファイル

- 石本健太, 「講義ノート『微分積分学』」, 2020 年, https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~ishimoto/files/note_calculus.pdf.
- 黒田紘敏, 「微分積分学入門」, 2024 年, https://www7b.biglobe.ne.jp/~h-kuroda/pdf/text_calculus.pdf.
- 吉田伸生, 「微分積分学」, 2007 年, https://ocw.kyoto-u.ac.jp/wp-content/uploads/2021/04/2010_bibunsekibungakuA.pdf.
- 西谷達雄, 「解析学」, <http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/~nishitani/calculus.pdf>.
- 松澤寛, 「解析学の基礎 (実数の連続性から定積分の存在まで)」, <https://www.sci.kanagawa-u.ac.jp/math-phys/hmatsu/BasicAnalysis.pdf>.
- 川端茂徳, 「解析学入門」, 2002 年, https://www.fit.ac.jp/elec/7_online/calculus.pdf.
- 中西敏浩, 「およそ 100 ページで学ぶ微分積分学」, 2021 年, <https://www.math.shimane-u.ac.jp/~tosihiro/basiccalculus.pdf>.

5.3 Web サイト

- Mathpedia, <https://math.jp>(旧版:<https://old.math.jp>).
- 数学の景色, <https://mathlandscape.com>.
- 高校数学の美しい物語, <https://manabitimes.jp/math>.
- KIT 数学ナビゲーション, <https://w3e.kanazawa-it.ac.jp/math>.
- Wikipedia, <https://ja.wikipedia.org>(英語版:<https://en.wikipedia.org>).
- Wolfram MathWorld, <https://mathworld.wolfram.com>.
- Mathlog, <https://mathlog.info>.
- "topics on calculus", PlanetMath, <https://planetmath.org/TopicsOnCalculus>.

2) 2024 年 9 月 20 日に新装改版が発売される予定です.

志賀浩二, 『微分・積分 30 講』, 数学 30 講シリーズ 1, 新装改版, 朝倉書店, 2024 年.