

上界・下界 ～定義・イメージ・例を解説～

MathAbyss

目次

| | | |
|-----|-----------------|---|
| 1 | 上界・下界の定義 | 2 |
| 2 | 上界・下界のイメージ・例・意義 | 2 |
| 3 | 関連内容 | 6 |
| 3.1 | 上界・下界と最大値・最小値 | 6 |
| 3.2 | 上界・下界に似た概念 | 7 |
| 4 | 参考文献 | 8 |
| 4.1 | 書籍 | 8 |
| 4.2 | PDF ファイル | 8 |
| 4.3 | Web サイト | 9 |

上界とは、実数の部分集合のどの元よりも大きい実数のことです。

下界とは、実数の部分集合のどの元よりも小さい実数のことです。

A を \mathbb{R} の空でない部分集合とする。ある $M \in \mathbb{R}$ が存在し、任意の $x \in A$ に対し、 $x \leq M$ となるとき、 M を A の上界 (upper bound) という。また、ある $m \in \mathbb{R}$ が存在し、任意の $x \in A$ に対し、 $m \leq x$ となるとき、 m を A の下界 (lower bound) という。

元記事の URL:https://mathabyss.com/upper_bound-lower_bound-calculus

1 上界・下界の定義

上界・下界の厳密な定義は次のようになります。

定義 1

A を \mathbb{R} の空でない部分集合とする。ある $a \in \mathbb{R}$ が存在し、任意の $x \in A$ に対し、 $x \leq a$ となるとき、 a を A の上界 (upper bound) という。また、ある $b \in \mathbb{R}$ が存在し、任意の $x \in A$ に対し、 $b \leq x$ となるとき、 b を A の下界 (lower bound) という。

A に上界が存在するとき、 A は上に有界 (bounded above) であるといい、下界が存在するとき、 A は下に有界 (bounded below) であるという。 A が上に有界かつ下に有界であるとき、 A は有界 (bounded) であるという。

\mathbb{R} 上の上界・下界を一般化した概念は、順序集合の上界・下界にあたる。これについては集合論の記事に譲ることにし、ここでは解析学の立場から \mathbb{R} 上の上界・下界を考えるものとする。

さて、上の定義を論理式を用いて表してみよう。空でない $A \subset \mathbb{R}$ に対し、 A の上界 a と下界 b は、それぞれ次の条件を満たす。

$$\forall x \in A [x \leq a]$$

$$\forall x \in A [b \leq x]$$

ここで、当たり前かもしれないが、 $x \leq a$ や $b \leq x$ といった不等式について、等号が成り立つのは、それぞれ x が A の上界、下界と一致するときである。

そして、 A に最大値や最小値が存在するとき、その値はそれぞれ A の上界・下界でもある。定義を見れば明らかだが、最大値・最小値は上界・下界の1つに過ぎない。

2 上界・下界のイメージ・例・意義

具体的な \mathbb{R} の空でない部分集合を通して、上界・下界を確認しよう。

以下、 \mathbb{R} の区間の上界・下界を考えることにする。区間についての詳細は別の記事を参照するとよい。

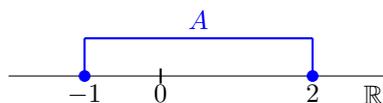


図 1

まず、 $A = [-1, 2] = \{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$ とおく。 A の最大値は 2 であり、 A の最小値は -1 である。 最大値・最小値はそれぞれ上界・下界の一種であるから、 A は有界である。

また、例えば 3 も A の上界であり、 -2 も A の下界である。 一般に、 A の上界全体の集合を $U(A)$ 、 下界全体の集合を $L(A)$ とすると、 $U(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$ であり、 $L(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$ である。

実際、任意の $a \geq 2, b \leq -1, x \in A$ に対し、 $b \leq -1 \leq x \leq 2 \leq a$ となり、 a, b はそれぞれ A の上界、 下界である。

また、 $a < 2$ のとき、 $2 \in A$ より a は A の上界でない。 さらに、 $b > -1$ のとき、 $-1 \in A$ より b は A の下界でない。

このように、 上界・下界は複数存在することがある。 一方で、 最大値・最小値や上限・下限は、 存在するとしても、 1 つしか存在しない (別の記事を参照せよ)。

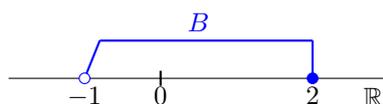


図 2

次に、 $B = (-1, 2] = \{x \mid -1 < x \leq 2\}$ とおく。 B の最大値は 2 であり、 最小値は存在しない。 上と同様の議論により、 B の上界全体の集合を $U(B)$ とすると、 $U(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$ である。 特に、 B の最大値 2 は B の上界でもある。 一方で、 B の下界全体の集合を $L(B)$ とすると、 $L(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$ である。 これも上と同様の議論により示すことができるのだが、 重要なのは -1 が B の下界であるという点である。 -1 は B の最小値ではないものの、 B の下界である。

問題 1

$b > -1$ のとき、 b が B の下界でないことを、 自分の手で証明してみるとよい。

解答 1

- $b > -1$ のとき、 ある $x \in B$ が存在し、 $x < b$ となることを示せばよい。
- 任意の $y \in B$ に対し、 $-1 < y \leq 2$
- つまり、 $-1 < x < b$ となる $x \in B$ が存在するかどうかを調べればよい。
- b と -1 の平均 $\frac{b-1}{2}$ を x とすればよさそう…?
- でも、 $x \in B$ となるかどうかは分からない!
- $b \leq 5$ のときは $x \in B$ となり、 この方法で証明できそう。
- $b > 5$ のときは?

- $2 \in B$ だから、定義より b は B の下界ではない。場合分けで示せるかも。

上のような考え方で x を見つけるとよい。あとは先程と同様に証明するだけ。

- $x = \min \left\{ \frac{b-1}{2}, 2 \right\}$ とおく。
- このとき $-1 \leq x < 2$ より $x \in B$
- また、 $x < b$
- よって、 b は B の下界でない。
- したがって、示された。

したがって、 B は有界である。

B のような集合では、最小値は存在しないが、 -1 は B の「最小値のようなもの」と言える。しかし、最小値はあくまでも「取ることのできる値のうち、最も小さい値」を表している。つまり、 B の元は -1 という値を取ることはないため、最小値と呼ぶことはできない。そこで、そのような「最小値のようなもの」を表す、 B の下限という概念を導入することになる。その広い概念として、 B の下界という概念を考えるのである。

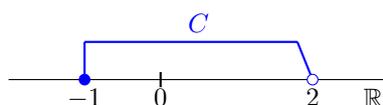


図 3

さらに、 $C = [-1, 2) = \{x \mid -1 \leq x < 2\}$ とおく。 C の最小値は -1 であり、最大値は存在しない。

上と同様の議論により、 C の上界全体の集合を $U(C)$ とすると、 $U(C) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$ である。また、 C の下界全体の集合を $L(C)$ とすると、 $L(C) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$ である。特に、 C の最小値 -1 は C の下界でもある。

したがって、 C は有界である。

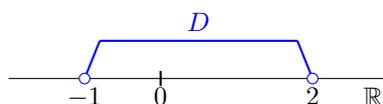


図 4

そして、 $D = (-1, 2) = \{x \mid -1 < x < 2\}$ とおくと、 D には最大値も最小値も存在しない。

上と同様の議論により、 D の上界全体の集合を $U(D)$ とすると、 $U(D) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$ である。また、 D の下界全体の集合を $L(D)$ とすると、 $L(D) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$ である。

したがって、 D は有界である。

ここで、 A, B, C, D の上界全体の集合と下界全体の集合がすべて等しいことに気づいただろうか。よく考えてみると、 A, B, C, D はほとんど同じような区間を表している。端点を含んでいるかどうか

が異なっているだけだ。つまり、上界と下界(上限と下限)によって、 A, B, C, D の「類似性」が明らかになり、最大値と最小値によって、 A, B, C, D の「違い」が明らかになると捉えることができる。

また、次のような集合の場合も、同様に上界・下界の存在性を確認することができる。

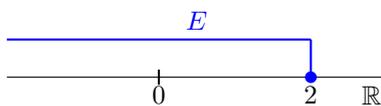


図 5

$E = (-\infty, 2] = \{x \mid x \leq 2\}$ の最大値は 2, 最小値は存在しない. E の上界全体の集合を $U(E)$ とすると, $U(E) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$ である. また, E の下界は存在しない. 実際, 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し, $\min\{2, t-1\} \in E$ が存在し, $\min\{2, t-1\} < t$ となる.

したがって, E は上に有界であり, 下に有界でない.

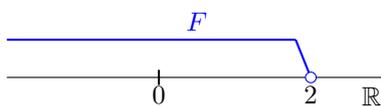


図 6

$F = (-\infty, 2) = \{x \mid x < 2\}$ の最大値及び最小値は存在しない. F の上界全体の集合を $U(F)$ とすると, $U(F) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$ である. また, F の下界は存在しない. 実際, 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し, $\min\{1, t-1\} \in F$ が存在し, $\min\{1, t-1\} < t$ となる.

したがって, F は上に有界であり, 下に有界でない.

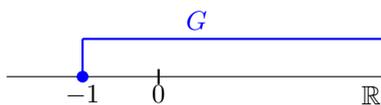


図 7

$G = [-1, \infty) = \{x \mid x \geq -1\}$ の最小値は -1 , 最大値は存在しない. G の下界全体の集合を $L(G)$ とすると, $L(G) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$ である. また, G の上界は存在しない.

したがって, G は下に有界であり, 上に有界でない.

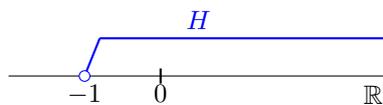


図 8

$H = (-1, \infty) = \{x \mid x > -1\}$ の最大値及び最小値は存在しない. H の下界全体の集合を $L(H)$ とすると, $L(H) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$ である. また, H の上界は存在しない. したがって, H は下に有界であり, 上に有界でない.



図 9

まとめると, 空でない \mathbb{R} の部分集合 I に対し, I の上界及び下界が存在するならば, それは上図のようになる. もちろん, I が一つの繋がった区間を表していたり, 一つの繋がった区間が複数合わさった集合を表していたりすることに注意が必要である.

3 関連内容

3.1 上界・下界と最大値・最小値

ここまで, 最大値・最小値は上界・下界の一種であると説明してきた. これは定義より明らかであるが, 念の為証明しておこう.

命題 1

A を \mathbb{R} の空でない部分集合とする.

- (1) A に最大値 $\max A$ が存在するとき, $\max A$ は A の上界である.
- (2) A に最小値 $\min A$ が存在するとき, $\min A$ は A の下界である.

証明)

- (1) $A \subset \mathbb{R}$ より, $\max A \in A$ であるから, $\max A \in \mathbb{R}$
 最大値の定義より, 任意の $x \in A$ に対し, $x \leq \max A$ となるから, 定義より, $\max A$ は A の上界である.
- (2) $A \subset \mathbb{R}$ より, $\min A \in A$ であるから, $\min A \in \mathbb{R}$
 最小値の定義より, 任意の $x \in A$ に対し, $\min A \leq x$ となるから, 定義より, $\min A$ は A の下界である.

■

そして、区間の例と同様に考えることにより、次の命題を得る。

命題 2

A を \mathbb{R} の空でない部分集合とし、 A の上界全体の集合を $U(A)$ 、下界全体の集合を $L(A)$ とする。

(1) A に最大値 $\max A$ が存在するとき、 $U(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \max A\}$

(2) A に最小値 $\min A$ が存在するとき、 $L(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid \min A \leq x\}$

証明)

(1) 命題 2 より、任意の $a \in \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \max A\}, x \in A$ に対し $x \leq \max A \leq a$

よって、 a は A の上界である。

ここで、 $b \notin \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \max A\}$ のとき、 $b < \max A$

$\max A \in A$ であるから、 b は A の上界でない。

したがって、 $U(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \max A\}$ である。

(2) 命題 2 より、任意の $a \in \{x \in \mathbb{R} \mid \min A \leq x\}, x \in A$ に対し $a \leq \min A \leq x$

よって、 a は A の下界である。

ここで、 $b \notin \{x \in \mathbb{R} \mid \min A \leq x\}$ のとき、 $b > \min A$

$\min A \in A$ であるから、 b は A の下界でない。

したがって、 $L(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid \min A \leq x\}$ である。

■

3.2 上界・下界に似た概念

上界・下界に似た概念として、次のようなものがある。上界・下界との違いを認識する必要がある。

定義 2

A を \mathbb{R} の空でない部分集合とする。ある $M \in A$ が存在し、任意の $x \in A$ に対し、 $x \leq M$ となるとき、 M を A の最大値 (maximum) という。また、ある $m \in A$ が存在し、任意の $x \in A$ に対し、 $m \leq x$ となるとき、 m を A の最小値 (minimum) という。

定義 3

A を \mathbb{R} の空でない部分集合とし、 A の上界全体の集合を $U(A)$ 、下界全体の集合を $L(A)$ とする。 $U(A)$ に最小値 α が存在するとき、 α を A の上限 (supremum) (または最小上界 (least upper bound)) といい、 $\sup A$ (または $\text{lub } A$) で表す。また、 $L(A)$ に最大値 β が存在するとき、 β を A の下限 (infimum) (または最大下界 (greatest lower bound)) といい、 $\inf A$ (または $\text{glb } A$) で表す。

それぞれ記事を公開しているため、合わせて参照するとよい。

また、関数の極大値・極小値については、別の記事を参照するとよい。

4 参考文献

この記事を含め、「微分積分学」の категория に属する記事は、以下の書籍・PDF ファイル・Web サイトを参考文献としています (それぞれの記事について、以下に掲載していない参考文献がある場合は、「追記」として逐一掲載しています)。

4.1 書籍

- ・杉浦光夫, 『解析入門 I』, 基礎数学 2, 東京大学出版会, 1980 年.
- ・杉浦光夫, 『解析入門 II』, 基礎数学 3, 東京大学出版会, 1985 年.
- ・杉浦光夫, 清水英男, 金子晃, 岡本和夫, 『解析演習』, 基礎数学 7, 東京大学出版会, 1989 年.
- ・高木貞治, 『定本 解析概論』, 岩波書店, 2010 年.
- ・松坂和夫, 『解析入門 上』, 松坂和夫 数学入門シリーズ, 新装版, 岩波書店, 2018 年.
- ・松坂和夫, 『解析入門 中』, 松坂和夫 数学入門シリーズ, 新装版, 岩波書店, 2018 年.
- ・松坂和夫, 『解析入門 下』, 松坂和夫 数学入門シリーズ, 新装版, 岩波書店, 2018 年.
- ・藤岡敦, 『手を動かしてまなぶ ε - δ 論法』, 裳華房, 2021 年.
- ・藤岡敦, 『手を動かしてまなぶ 微分積分』, 裳華房, 2019 年.
- ・志賀浩二, 『微分・積分 30 講』, 数学 30 講シリーズ 1, 朝倉書店, 1988 年¹⁾.
- ・齋藤正彦, 『齋藤正彦 微分積分学』, 東京図書, 2006 年.
- ・加藤文元, 『大学教養 微分積分』, 数研講座シリーズ, 数研出版, 2019 年.
- ・『大学教養 微分積分』, 加藤文元 (監修), 数研出版編集部 (編著), チャート式シリーズ, 数研出版, 2019 年.
- ・小寺平治, 『明解演習 微分積分』, 明解演習シリーズ 2, 共立出版, 1984 年.

4.2 PDF ファイル

- ・石本健太, 「講義ノート『微分積分学』」, 2020 年, https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~ishimoto/files/note_calculus.pdf.
- ・黒田紘敏, 「微分積分学入門」, 2024 年, https://www7b.biglobe.ne.jp/~h-kuroda/pdf/text_calculus.pdf.
- ・吉田伸生, 「微分積分学」, 2007 年, https://ocw.kyoto-u.ac.jp/wp-content/uploads/2021/04/2010_bibunsekibungakuA.pdf.
- ・西谷達雄, 「解析学」, <http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/~nishitani/calculus.pdf>.

1) 2024 年 9 月 20 日に新装改版が発売される予定です。

志賀浩二, 『微分・積分 30 講』, 数学 30 講シリーズ 1, 新装改版, 朝倉書店, 2024 年.

- 松澤寛, 「解析学の基礎 (実数の連続性から定積分の存在まで)」,
<https://www.sci.kanagawa-u.ac.jp/math-phys/hmatsu/BasicAnalysis.pdf>.
- 川端茂徳, 「解析学入門」, 2002 年, https://www.fit.ac.jp/elec/7_online/calculus.pdf.
- 中西敏浩, 「およそ 100 ページで学ぶ微分積分学」, 2021 年, <https://www.math.shimane-u.ac.jp/~tosihiro/basiccalculus.pdf>.

4.3 Web サイト

- Mathpedia, <https://math.jp>(旧版:<https://old.math.jp>).
- 数学の景色, <https://mathlandscape.com>.
- 高校数学の美しい物語, <https://manabitimes.jp/math>.
- KIT 数学ナビゲーション, <https://w3e.kanazawa-it.ac.jp/math>.
- Wikipedia, <https://ja.wikipedia.org>(英語版:<https://en.wikipedia.org>).
- Wolfram MathWorld, <https://mathworld.wolfram.com>.
- Mathlog, <https://mathlog.info>.
- "topics on calculus", PlanetMath, <https://planetmath.org/TopicsOnCalculus>.