2025 年度 国立 10 大学入試問題 (旧帝一科神) 数学

MathAbyss

2025 年 3 月 4 日

※注意 この PDF ファイルは，2025 年度の国公立大学 2 次試験の前期日程で実施された数学の試験問題のうち，東京大学，京都大学，東北大学，大阪大学，名古屋大学，北海道大学，九州大学，一橋大学，東京科学大学，神戸大学の問題を収録したものです．後期日程の試験問題については北海道大学，東北大学，一橋大学，神戸大学，九州大学の問題を順次追加掲載する予定です．

目次

1　東京大学

1.1　文系

前期 数学 (文科) 配点 80 点 試験時間 100 分 令和 7 年 2 月 25 日 14 時 00 分-15 時 40 分実施

$\boxed{1}$　a を正の実数とする．座標平面において，放物線 $C : y = x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(a, a^2)$ における C の接線と直交し，P を通る直線を ℓ とおく．ℓ と C の交点のうち，P と異なる点を Q とおく．

(1)　Q の x 座標を求めよ．

Q における C の接線と直交し，Q を通る直線を m とおく．m と C の交点のうち，Q と異なる点を R とおく．

(2)　a がすべての正の実数を動くとき，R の x 座標の最小値を求めよ．

$\boxed{2}$ 平面上で $\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = 1$ である二等辺三角形 ABC を考える．正の実数 r に対し，A, B, C それぞれを中心とする半径 r の円 3 つをあわせた領域を D_r とする．ただし，この問いでは，三角形と円は周とその内部からなるものとする．辺 AB, AC, BC がすべて D_r に含まれるような最小の r を s，三角形 ABC が D_r に含まれるような最小の r を t と表す．

(1)　$\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，s と t を求めよ．

(2)　$\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{2\pi}{3}$ のとき，s と t を求めよ．

(3)　$0 < \theta < \pi$ を満たす θ に対して，$\angle\mathrm{BAC} = \theta$ のとき，s と t を θ を用いて表せ．

$\boxed{3}$ 白玉 2 個が横に並んでいる．投げたとき表と裏のでる確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ のコインを用いて，次の手順 $(*)$ をくり返し，白玉または黒玉を横一列に並べていく．

手順 $(*)$　コインを投げ，表が出たら白玉，裏が出たら黒玉を，それまでに並べられている一番右にある玉の右隣におく．そして，新しくおいた玉の色がその 1 つ左の玉の色と異なり，かつ 2 つ左の玉の色と一致するときには，新しくおいた玉の 1 つ左の玉を新しくおいた玉と同じ色の玉にとりかえる．

例えば，手順 $(*)$ を 2 回行いコインが裏，表の順に出た場合には，白玉が 4 つ並ぶ．正の整数 n に対して，手順 $(*)$ を n 回行った時点での $(n+2)$ 個の玉の並び方を考える．

(1)　$n=3$ のとき，右から 2 番目の玉が白玉である確率を求めよ．

(2)　n を正の整数とする．右から 2 番目の玉が白玉である確率を求めよ．

(3)　n を正の整数とする．右から 1 番目と 2 番目の玉がともに白玉である確率を求めよ．

$\boxed{4}$ a を実数とする．座標平面において，次の連立不等式の表す領域の面積を $S(a)$ とする．

$$\begin{cases} y \leqq -\dfrac{1}{2}x^2 + 2 \\ y \geqq |x^2 + a| \\ -1 \leqq x \leqq 1 \end{cases}$$

a が $-2 \leqq a \leqq 2$ の範囲を動くとき，$S(a)$ の最大値を求めよ．

1.2　理系

前期 数学 (理科) 配点 120 点 試験時間 150 分 令和 7 年 2 月 25 日 14 時 00 分-16 時 30 分実施

$\boxed{1}$ 座標平面上の点 $\mathrm{A}(0,0), \mathrm{B}(0,1), \mathrm{C}(1,1), \mathrm{D}(1,0)$ を考える．実数 $0 < t < 1$ に対して，線分 $\mathrm{AB}, \mathrm{BC}, \mathrm{CD}$ を $t:(1-t)$ に内分する点をそれぞれ $\mathrm{P}_t, \mathrm{Q}_t, \mathrm{R}_t$ とし，線分 $\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t, \mathrm{Q}_t\mathrm{R}_t$ を $t:(1-t)$ に内分する点をそれぞれ $\mathrm{S}_t, \mathrm{T}_t$ とする．さらに，線分 $\mathrm{S}_t\mathrm{T}_t$ を $t:(1-t)$ に内分する点を U_t とする．また，点 A を U_0，点 D を U_1 とする．

(1) 点 U_t の座標を求めよ．

(2) t が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動くときに点 U_t が描く曲線と，線分 AD で囲まれた部分の面積を求めよ．

(3) a を $0 < a < 1$ を満たす実数とする．t が $0 \leqq t \leqq a$ の範囲を動くときに点 U_t が描く曲線の長さを，a の多項式の形で求めよ．

$\boxed{2}$ (1)　$x > 0$ のとき，不等式 $\log x \leqq x - 1$ を示せ．

(2)　次の極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty} n \int_1^2 \log\left(\frac{1 + x^{\frac{1}{n}}}{2}\right) dx$$

$\boxed{3}$ 平行四辺形 ABCD において，$\angle\mathrm{ABC} = \dfrac{\pi}{6}, \mathrm{AB} = a, \mathrm{BC} = b, a \leqq b$ とする．次の条件を満たす長方形 EFGH を考え，その面積を S とする．

条件:　点 A, B, C, D はそれぞれ辺 EF, FG, GH, HE 上にある．

ただし，辺はその両端の点も含むものとする．

(1)　$\angle\mathrm{BCG} = \theta$ とするとき，S を a, b, θ を用いて表せ．

(2)　S のとりうる値の最大値を a, b を用いて表せ．

$\boxed{4}$ この問いでは, 0 以上の整数の 2 乗になる数を平方数と呼ぶ．a を正の整数とし，$f_a(x) = x^2 + x - a$ とおく．

(1)　n を正の整数とする．$f_a(n)$ が平方数ならば，$n \leqq a$ であることを示せ．

(2)　$f_a(n)$ が平方数となる正の整数 n の個数を N_a とおく，次の条件 (i),(ii) が同値であることを示せ．

(i)　$N_a = 1$ である．

(ii)　$4a + 1$ は素数である．

$\boxed{5}$ n を 2 以上の整数とする．1 から n までの数字が書かれた札が各 1 枚ずつ合計 n 枚あり，横一列におかれている．1 以上 $(n-1)$ 以下の整数 i に対して，次の操作 (T_i) を考える．

(T_i)　左から i 番目の札の数字が，左から $(i+1)$ 番目の札の数字よりも大きければ，これら 2 枚の札の位置を入れ替える．そうでなければ，札の位置をかえない．

最初の状態において札の数字は左から $A_1, A_2, \ldots, A_n$ であったとする．この状態から $(n-1)$ 回の操作 $(\mathrm{T}_1), (\mathrm{T}_2), \ldots, (\mathrm{T}_{n-1})$ を順に行った後，続けて $(n-1)$ 回の操作 $(\mathrm{T}_{n-1}), \ldots, (\mathrm{T}_2), (\mathrm{T}_1)$ を順に行ったところ，札の数字は左から $1, 2, \ldots, n$ と小さい順に並んだ．以下の問いに答えよ．

(1)　A_1 と A_2 のうち少なくとも一方は 2 以下であることを示せ．

(2)　最初の状態としてありうる札の数字の並び方 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ の総数を c_n とする．n が 4 以上の整数であるとき，c_n を c_{n-1} と c_{n-2} を用いて表せ．

$\boxed{6}$　複素数平面上の点 $\dfrac{1}{2}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円の周から原点を除いた曲線を C とする．

(1)　曲線 C 上の複素数 z に対し，$\dfrac{1}{z}$ の実部は 1 であることを示せ．

(2)　α, β を曲線 C 上の相異なる複素数とするとき，$\dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2}$ がとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ．

(3)　γ を (2) で求めた範囲に属さない複素数とするとき，$\dfrac{1}{\gamma}$ の実部がとりうる値の最大値と最小値を求めよ．

2　京都大学

2.1　文系

前期 数学 (文系) 配点 150 点 試験時間 120 分 令和 7 年 2 月 25 日 13 時 30 分-15 時 30 分実施

$\boxed{1}$　次の各問に答えよ.

問 1　x, y, z は実数で

$$2025^x = 3^y = 5^z$$

を満たすとする．このとき

$$2xy + 4xz - yz = 0$$

であることを示せ.

問 2　$n^4 + 6n^2 + 23$ が $n^2 + n + 3$ で割り切れるような正の整数 n をすべて求めよ.

$\boxed{2}$　実数 a, b についての次の条件 $(*)$ を考える．

$(*)$　ある実数係数の 2 次式 $f(x)$ と，ある実数 c に対して，x についての恒等式

$$\frac{1}{8}x^4 + ax^3 + bx^2 = f(f(x)) + c$$

が成り立つ．

この条件 $(*)$ を満たす点 (a, b) 全体の集合を座標平面上に図示せよ．

$\boxed{3}$　n は正の整数とする．1 枚の硬貨を投げ，表が出たら 1，裏が出たら 2 と記録する．この試行を n 回くり返し，記録された順に数字を左から並べて n 桁の数 X を作る．ただし，数の表し方は十進法とする．このとき，X が 6 で割り切れる確率を求めよ．

$\boxed{4}$ 座標平面において，曲線 $C_1 : y = x^2 - 2|x|$，曲線 $C_2 : y = x^2 - 5x + \dfrac{7}{4}$，直線 $l_1 : x = \dfrac{3}{2}$ を考える．

(1) 点 $(0, 0)$ と異なる点で C_1 と接し，さらに C_2 とも接するような直線 l_2 がただ 1 つ存在することを示せ．

(2) C_1 と l_2 の共有点を P とし，その x 座標を a とする．また，l_1 と l_2 の共有点を Q とし，C_1 と l_1 の共有点を R とする．曲線 C_1 の $a \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}$ の部分，線分 PQ，および線分 QR で囲まれる図形の面積を求めよ．

$\boxed{5}$ (文理共通)

座標空間の 4 点 $\mathrm{O, A, B, C}$ は同一平面上にないとする．s, t, u は 0 でない実数とする．直線 OA 上の点 L，直線 OB 上の点 M，直線 OC 上の点 N を

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OM}} = t\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{ON}} = u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

が成り立つようにとる．s, t, u が $\dfrac{1}{s} + \dfrac{2}{t} + \dfrac{3}{u} = 4$ を満たす範囲であらゆる値をとるとき，3 点 $\mathrm{L, M, N}$ の定める平面 LMN は，s, t, u の値に無関係な一定の点を通ることを示せ．

2.2　理系

前期 数学 (理系) 配点 200 点 試験時間 150 分 令和 7 年 2 月 25 日 13 時 30 分-16 時 00 分実施

$\boxed{1}$　次の各問に答えよ．

問 1　i は虚数単位とする．複素数 z が，絶対値 2 である複素数全体を動くとき，$\left|z-\dfrac{i}{z}\right|$ の最大値と最小値を求めよ．

問 2　次の定積分の値を求めよ．

(i)　$\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x\sqrt{x^2+1}+2x^3+1}{x^2+1}dx$

(ii)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}dx$

$\boxed{2}$　正の整数 x, y, z を用いて

$$N = 9z^2 = x^6 + y^4$$

と表される正の整数 N の最小値を求めよ.

$\boxed{3}$ e は自然対数の底とする．$x > \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ において定義された次の関数 $f(x), g(x)$ を考える．

$$f(x) = x^2 \log x$$
$$g(x) = x^2 \log x - \frac{1}{1 + 2\log x}$$

実数 t は $t > \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ を満たすとする．曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線に垂直で，点 $(t, g(t))$ を通る直線を l_t とする．直線 l_t が x 軸と交わる点の x 座標を $p(t)$ とする．t が $\dfrac{1}{\sqrt{e}} < t \leqq e$ の範囲を動くとき，$p(t)$ の取りうる値の範囲を求めよ．

$\boxed{4}$　(文理一部共通)

座標空間の 4 点 $\mathrm{O}, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ は同一平面上にないとする．s, t, u は 0 でない実数とする．直線 OA 上の点 L，直線 OB 上の点 M，直線 OC 上の点 N を

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OM}} = t\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{ON}} = u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

が成り立つようにとる．

(1)　s, t, u が $\dfrac{1}{s} + \dfrac{2}{t} + \dfrac{3}{u} = 4$ を満たす範囲であらゆる値をとるとき，3 点 $\mathrm{L}, \mathrm{M}, \mathrm{N}$ の定める平面 LMN は，s, t, u の値に無関係な一定の点を通ることを示せ．

(2)　四面体 OABC の体積を V とする．(1) における点 P について，四面体 PABC の体積を V を用いて表せ．

$\boxed{5}$ θ は実数とする．xyz 空間の 2 点 A $\left(0, 0, \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$, P $\left(\cos\theta, \sin\theta, \dfrac{1}{2}\cos\theta\right)$ を通る直線 AP が xy 平面と交わるとき，その交点を Q とする．θ が $-\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ の範囲を動くときの点 Q の軌跡を求め，その軌跡を xy 平面上に図示せよ．

$\boxed{6}$ n は 2 以上の整数とする．1 枚の硬貨を続けて n 回投げる．このとき，k 回目 $(1 \leqq k \leqq n)$ に表が出たら $X_k = 1$，裏が出たら $X_k = 0$ として，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ を定める．

$$Y_n = \sum_{k=2}^{n} X_{k-1}X_k$$

とするとき，Y_n が奇数である確率 p_n を求めよ．

3 東北大学

3.1 文系

前期 数学 (文系等) 試験時間 100 分 令和 7 年 2 月 26 日 10 時 00 分-11 時 40 分実施

$\boxed{1}$ (文理共通)

原点を出発点として数直線上を動く点 P がある．試行 $(*)$ を次のように定める．

$(*)$ 1 枚の硬貨を 1 回投げて

- 表が出た場合は点 P を正の向きに 1 だけ進める．
- 裏が出た場合は 1 個のさいころを 1 回投げ，奇数の目が出た場合は点 P を正の向きに 1 だけ進め，偶数の目が出た場合は点 P を負の向きに 2 だけ進める．

ただし，コインを投げたとき表裏の出る確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$，さいころを投げたとき 1 から 6 までの整数の目の出る確率はそれぞれ $\frac{1}{6}$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 試行 $(*)$ を 3 回繰り返した後に，点 P が原点に戻っている確率を求めよ．

(2) 試行 $(*)$ を 6 回繰り返した後に，点 P が原点に戻っている確率を求めよ．

(3) n を 3 で割り切れない正の整数とする．試行 $(*)$ を n 回繰り返した後に，点 P が原点に戻っている確率を求めよ．

$\boxed{2}$　(文理共通)

正の実数からなる 2 つの数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ を次のように定める．

$$x_1 = 2, \quad y_1 = \frac{1}{2}, \quad x_{n+1} = (x_n)^5 (y_n)^2, \quad y_{n+1} = x_n (y_n)^6$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　k を実数とする．$a_n = \log_2 x_n, b_n = \log_2 y_n$ とおく．このとき，数列 $\{a_n + kb_n\}$ が等比数列になるような k の値をすべて求めよ．

(2)　数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めよ．

$\boxed{3}$　四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}, \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}, \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とする．点 D は $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 3\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を満たすとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　四面体 OABC の体積を V とするとき，四角錐 OABCD の体積を V を用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ．

(3)　線分 AD と線分 BC の交点を P とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ．

(4)　四面体 OABC が 1 辺の長さ 1 の正四面体のとき，線分 OD の長さを求めよ．

$\boxed{4}$　k を正の実数とする．曲線 $y = x(x-2)^2$ と放物線 $y = kx^2$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるような k の値を求めよ．

3.2　理系

前期 数学 (理系) 試験時間 150 分 令和 7 年 2 月 26 日 10 時 00 分-12 時 30 分実施

$\boxed{1}$　(文理共通)

原点を出発点として数直線上を動く点 P がある．試行 $(*)$ を次のように定める．

$(*)$　1 枚の硬貨を 1 回投げて

- 表が出た場合は点 P を正の向きに 1 だけ進める．
- 裏が出た場合は 1 個のさいころを 1 回投げ，奇数の目が出た場合は点 P を正の向きに 1 だけ進め，偶数の目が出た場合は点 P を負の向きに 2 だけ進める．

ただし，コインを投げたとき表裏の出る確率はそれぞれ $\dfrac{1}{2}$，さいころを投げたとき 1 から 6 までの整数の目の出る確率はそれぞれ $\dfrac{1}{6}$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　試行 $(*)$ を 3 回繰り返した後に，点 P が原点に戻っている確率を求めよ．

(2)　試行 $(*)$ を 6 回繰り返した後に，点 P が原点に戻っている確率を求めよ．

(3)　n を 3 で割り切れない正の整数とする．試行 $(*)$ を n 回繰り返した後に，点 P が原点に戻っている確率を求めよ．

$\boxed{2}$　(文理共通)

正の実数からなる 2 つの数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ を次のように定める．

$$x_1 = 2, \quad y_1 = \frac{1}{2}, \quad x_{n+1} = (x_n)^5 (y_n)^2, \quad y_{n+1} = x_n (y_n)^6$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　k を実数とする．$a_n = \log_2 x_n, b_n = \log_2 y_n$ とおく．このとき，数列 $\{a_n + kb_n\}$ が等比数列になるような k の値をすべて求めよ．

(2)　数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めよ．

$\boxed{3}$　a を実数とし，関数 $f(x)$ を次のように定める．

$$f(x) = x^4 + \frac{4a}{3}x^3 + (a+2)x^2$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　関数 $f(x)$ が極大値をもつような a のとり得る値の範囲を求めよ．

(2)　関数 $f(x)$ が $x = 0$ で極大値をもつような a のとり得る値の範囲を求めよ．

$\boxed{4}$ n を正の整数，a を正の実数とし，関数 $f(x)$ と $g(x)$ を次のように定める．

$$f(x) = n \log x, \quad g(x) = ax^n$$

また，曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ が共有点をもち，その共有点における 2 つの接線が一致しているとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　a の値を求めよ．

(2)　この 2 つの曲線と x 軸で囲まれた部分の面積 S_n を求めよ．

(3)　(2) で求めた S_n に対し，極限 $\lim_{n \to \infty} S_n$ を求めよ．

$\boxed{5}$ S を xyz 空間内の原点 O$(0,0,0)$ を中心とする半径 1 の球面とする．また，点 P(a,b,c) を点 N$(0,0,1)$ とは異なる球面 S 上の点とする．点 P と点 N を通る直線 ℓ と xy 平面との交点を Q とおく．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 点 Q の座標を a,b,c を用いて表せ．

(2) xy 平面上の点 $(p,q,0)$ と点 N を通る直線を m とする．直線 m と球面 S の交点のうち，点 N 以外の交点の座標を p,q を用いて表せ．

(3) 点 $\left(0,0,\dfrac{1}{2}\right)$ を通り，ベクトル $(3,4,5)$ に直交する平面 α を考える．点 P が平面 α と球面 S の交わりを動くとき，点 Q は xy 平面上の円周上を動くことを示せ．

$\boxed{6}$　1 辺の長さが 1 の正五角形を K とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　K の対角線の長さを求めよ．

(2)　K の周で囲まれた図形を P とする．また，P を K の外接円の中心の周りに角 θ だけ回転して得られる図形を P_θ とする．P と P_θ の共通部分の周の長さを ℓ_θ とする．θ が $0^\circ < \theta < 72^\circ$ の範囲を動くとき，ℓ_θ の最小値が $2\sqrt{5}$ であることを示せ．

4　大阪大学

4.1　文系

前期 数学 (文系) 試験時間 90 分 令和 7 年 2 月 25 日 10 時 00 分-11 時 30 分実施

$\boxed{1}$　(文理共通)

平面上の三角形 OAB を考える．$\angle$AOB は鋭角，$\mathrm{OA} = 3, \mathrm{OB} = t$ とする．また，点 A から直線 OB に下ろした垂線と直線 OB の交点を C とし，$\mathrm{OC} = 1$ とする．線分 AB を $2:1$ に内分する点を P，点 A から直線 OP に下ろした垂線と直線 OB との交点を R とする．

(1)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を t を用いて表せ.

(2)　線分 OR の長さを t を用いて表せ.

(3)　線分 OB の中点を M とする．点 R が線分 MB 上にあるとき，t のとりうる値の範囲を求めよ.

$\boxed{2}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}a_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

(1) 正の整数 k, ℓ に対して

$$\frac{k}{k+\ell-1}a_{k+1}a_\ell + \frac{\ell}{k+\ell-1}a_k a_{\ell+1} = a_k a_\ell$$

が成り立つことを示せ．

(2) 正の整数 m に対して

$$\sum_{k=1}^{m} a_k a_{m-k+1} = 1$$

が成り立つことを示せ．

$\boxed{3}$ 座標平面において，$y = x^2 - 1$ で表される放物線を C とする．C 上の点 P における C の接線を ℓ とする．ただし，点 P は y 軸上にはないものとする．O を原点とし，放物線 C と線分 OP および y 軸で囲まれた図形の面積を S，放物線 C と接線 ℓ および y 軸で囲まれた図形の面積を T とする．$S - T$ の最大値を求めよ．

4.2　理系

前期 数学 (理系) 試験時間 150 分 令和 7 年 2 月 25 日 09 時 00 分-11 時 30 分実施

$\boxed{1}$ (文理共通)

平面上の三角形 OAB を考える．$\angle$AOB は鋭角，$\mathrm{OA} = 3, \mathrm{OB} = t$ とする．また，点 A から直線 OB に下ろした垂線と直線 OB の交点を C とし，$\mathrm{OC} = 1$ とする．線分 AB を $2:1$ に内分する点を P，点 A から直線 OP に下ろした垂線と直線 OB との交点を R とする．

(1)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を t を用いて表せ.

(2)　線分 OR の長さを t を用いて表せ.

(3)　線分 OB の中点を M とする．点 R が線分 MB 上にあるとき，t のとりうる値の範囲を求めよ.

$\boxed{2}$ p と m を実数とし，関数 $f(x) = x^3 + 3px^2 + 3mx$ は $x = \alpha$ で極大値をとり，$x = \beta$ で極小値をとるとする．

(1)　$f(\alpha) - f(\beta)$ を p と m を用いて表せ．

(2)　p と m が $f(\alpha) - f(\beta) = 4$ を満たしながら動くとき，曲線 $y = f(x)$ の変曲点の軌跡を求めよ．

$\boxed{3}$ 座標空間に 3 点 $\mathrm{O}(0,0,0), \mathrm{A}(0,1,1), \mathrm{P}(x,y,0)$ がある．$\angle\mathrm{OAP} = 30^\circ$ かつ $y \geqq 0$ を満たすように点 P が動くとき，$(x+1)(y+1)$ の最大値と最小値を求めよ．

$\boxed{4}$　次の問いに答えよ.

(1)　$t>0$ のとき

$$-\frac{1}{t}<\int_{t}^{2t}\frac{\sin x}{x^2}dx<\frac{1}{t}$$

が成り立つことを示せ.

(2)　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_{t}^{2t}\frac{\cos x}{x}dx=0$ を示せ.

(3)　$f(x)=\sin\left(\dfrac{3x}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおく.

$$\lim_{t\to\infty}\int_{1}^{t}\frac{f(x)}{x}dx=\frac{1}{2}\int_{1}^{2}\frac{\cos x}{x}dx$$

を示せ.

$\boxed{5}$ 投げたときに表と裏の出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ のコインがある．A, B, C の 3 文字を BAC のように 1 個ずつすべて並べて得られる文字列に対して，コインを投げて次の操作を行う．

- 表が出たら文字列の左から 1 文字目と 2 文字目を入れかえる．
- 裏が出たら文字列の左から 2 文字目と 3 文字目を入れかえる．

例えば，文字列が BAC であるときに，2 回続けてコインを投げて表，裏の順に出たとすると，文字列は BAC から ABC を経て ACB となる．

最初の文字列は ABC であるとする．コインを n 回続けて投げたあとの文字列が ABC である確率を p_n とし，BCA である確率を q_n とする．

(1)　k を正の整数とするとき，$p_{2k} - q_{2k}$ を求めよ．

(2)　n を正の整数とするとき，p_n を求めよ．

5　名古屋大学

5.1　文系

前期 数学 (文科系) 試験時間 90 分 令和 7 年 2 月 26 日 10 時 00 分-11 時 30 分実施

$\boxed{1}$　実数 b, c に対し，放物線 $y = f(x) = x^2 + bx + c$ が 2 点 $(p, 0), (q, 0)$ を通ると仮定する (ただし $p < q$)．また，条件 $0 < t \leqq 1$ を満たす実数 t に対し実数 r, s を次のように定める．

$$r = \frac{1+t}{2}p + \frac{1-t}{2}q, \quad s = \frac{1-t}{2}p + \frac{1+t}{2}q$$

以下の問いに答えよ．

(1)　$q - s, r - p, s + r, s - r$ のそれぞれを b, c, t を用いて表せ．

(2)　sr および $s^2 + r^2$ を b, c, t を用いて表せ．

(3)　放物線 $y = f(x)$，直線 $x = r, x = s$，および x 軸が囲む領域の面積を b, c, t を用いて表せ．

$\boxed{2}$ (文理共通)

整数 a, b, c に対し次の条件を考える．

$$(*) \quad a \geqq b \geqq 0 \quad \text{かつ} \quad a^2 - b^2 = c$$

以下の問いに答えよ．

(1) $c = 24, 25, 26$ それぞれの場合に条件 $(*)$ をみたす整数の組 (a, b) をすべて求めよ．

(2) p は 3 以上の素数，n は正の整数，$c = 4p^{2n}$ とする．このとき，条件 $(*)$ をみたす整数の組 (a, b) をすべて求めよ．

$\boxed{3}$ (文理共通)

コイン①，…，⑥が下図のようにマス目の中に置かれている．

①	②	③
④	⑤	⑥

これらのコインから無作為にひとつを選び，選んだコインはそのままにし，そのコインのあるマス目と辺を共有して隣接するマス目のコインを裏返す操作を考える．例えば，①を選べば，②，④を裏返し，②を選べば，①，③，⑤を裏返す．最初はすべてのコインが表向きに置かれていたとする．正の整数 n に対し，n 回目の操作終了時点ですべてのコインが裏向きである確率を p_n とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) p_2 を求めよ．

(2) コイン①，…，⑥をグループ A, B に分けることによって，n 回目の操作終了時点ですべてのコインが裏向きであるための必要十分条件を次の形に表すことができる:

n 回目の操作終了時点までに A に属する各コインはそれぞれ奇数回選ばれ，B に属する各コインはそれぞれ偶数回選ばれる．

どのようにグループ分けすればよいかを答えよ．

(3) p_4 を求めよ．

5.2　理系

前期 数学 (理科系) 試験時間 150 分 令和 7 年 2 月 26 日 10 時 00 分-12 時 30 分実施

$\boxed{1}$ (1) 実数 x を変数とする関数 $f(x)$ が導関数 $f'(x)$ および第 2 次導関数 $f''(x)$ をもち，すべての x に対し $f''(x) > 0$ をみたすとする．さらに以下の極限値 $a, b, (a < b)$ が存在すると仮定する．

$$\lim_{x \to -\infty} f'(x) = a, \quad \lim_{x \to \infty} f'(x) = b$$

このとき，$a < c < b$ をみたす任意の実数 c に対し，関数 $g(x) = cx - f(x)$ の値を最大にする $x = x_0$ がただひとつ存在することを示せ．

(2) 実数 x を変数とする関数

$$f(x) = \log\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$$

はすべての x に対し $f''(x) > 0$ をみたすことを示せ．また，この f に対し小問 (1) の極限値 a, b を求めよ．

(3) 小問 (2) の関数 f および極限値 a, b を考える．$a < c < b$ をみたす任意の実数 c に対し小問 (1) の x_0 および $g(x_0)$ を c を用いて表せ．

$\boxed{2}$ (文理共通)

整数 a, b, c に対し次の条件を考える．

$$(*) \quad a \geqq b \geqq 0 \quad \text{かつ} \quad a^2 - b^2 = c$$

以下の問いに答えよ．

(1) $c = 24, 25, 26$ それぞれの場合に条件 $(*)$ をみたす整数の組 (a, b) をすべて求めよ．

(2) p は 3 以上の素数，n は正の整数，$c = 4p^{2n}$ とする．このとき，条件 $(*)$ をみたす整数の組 (a, b) をすべて求めよ．

$\boxed{3}$ 以下の問いに答えよ．

(1) 実数 r, α は $0 < r \leqq 1, 0 \leqq \alpha < \pi$ をみたすとする．xy 平面内で，点 $(1, 0)$ を中心にもつ半径 r の円周およびその内部を C とする．C を原点 $(0, 0)$ を中心に反時計まわりに角度 α だけ回転させるとき，C が通過する領域の面積を求めよ．

(2) 実数 R, α は $0 < R \leqq 1, 0 \leqq \alpha < \pi$ をみたすとする．xyz 空間内で，点 $(1, 0, 0)$ を中心にもつ半径 R の球面およびその内部を B とする．B を z 軸のまわりに角度 α だけ回転させるとき，B が通過する領域の体積を求めよ．ただし，回転の向きは回転後の B の中心が $(\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$ になるように選ぶものとする．

$\boxed{4}$ (文理共通)

コイン①，...，⑥が下図のようにマス目の中に置かれている．

①	②	③
④	⑤	⑥

これらのコインから無作為にひとつを選び，選んだコインはそのままにし，そのコインのあるマス目と辺を共有して隣接するマス目のコインを裏返す操作を考える．例えば，①を選べば，②，④を裏返し，②を選べば，①，③，⑤を裏返す．最初はすべてのコインが表向きに置かれていたとする．正の整数 n に対し，n 回目の操作終了時点ですべてのコインが裏向きである確率を p_n とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) p_2 を求めよ．

(2) コイン①，...，⑥をグループ A, B に分けることによって，n 回目の操作終了時点ですべてのコインが裏向きであるための必要十分条件を次の形に表すことができる:

n 回目の操作終了時点までに A に属する各コインはそれぞれ奇数回選ばれ，B に属する各コインはそれぞれ偶数回選ばれる．

どのようにグループ分けすればよいかを答えよ．

(3) p_4 を求めよ．

6　北海道大学

6.1　文系

前期 数学 (文系) 試験時間 90 分 令和 7 年 2 月 25 日 09 時 00 分-10 時 30 分実施

$\boxed{1}$　関数 $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 30$ について考える．$y = f(x)$ のグラフを C とおく．

(1)　$f(x)$ が極大値，極小値をとるような x をそれぞれ求め，$f(x)$ の極大値，極小値を求めよ．

(2)　C 上の点 $(-3, -6)$ を通り，C に接する直線の方程式をすべて求めよ．

$\boxed{2}$ 整数 a, b, c は条件

$$2 \leqq a < b < c \leqq 6$$

を満たすとする．

(1) 不等式 $a + b > c$ を満たすような (a, b, c) をすべて挙げよ．

(2) 不等式 $a^2 + b^2 \geqq c^2$ を満たすような (a, b, c) をすべて挙げよ．

(3) (2) で求めた各 (a, b, c) について，頂点 A, B, C と向かい合う辺の長さがそれぞれ a, b, c で与えられる $\triangle$ABC を考える．このようなすべての $\triangle$ABC について $\cos\angle$ACB を求めよ．

$\boxed{3}$　数列 $\{a_n\}$ を次の条件により定める.

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3,$$
$$(n+1)a_{n+2} - (2n+3)a_{n+1} + (n+2)a_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

(1)　$b_n = a_{n+1} - a_n$ とおくと,

$$b_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} b_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

が成り立つことを示せ.

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(3)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{225} \frac{1}{a_n}$ の値を求めよ.

$\boxed{4}$　関数 $f(x)$ は，すべての実数 x および全ての整数 n について $f(nx) = \{f(x)\}^n$ を満たし，さらに $f(1) = 2$ を満たすとする．ただし，$f(x)$ のとりうる値は 0 でない実数とする．

(1)　$f(n) \leqq 100$ となるような最大の整数 n を求めよ．

(2)　すべての実数 x について $f(x) > 0$ であることを証明せよ．

(3)　$f(0.25)$ を求めよ．

(4)　a が有理数のとき，$f(a)$ を a で表せ．

6.2　理系

前期 数学 (理系) 試験時間 120 分 令和 7 年 2 月 25 日 09 時 00 分-11 時 00 分実施

$\boxed{1}$ α, r を $\alpha > 1, r > 1$ を満たす実数とする．数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = \alpha$ および公比が r の等比数列とする．数列 $\{b_n\}$ を $b_n = \log_{a_n}(a_{n+1}) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$ で定める．

(1)　b_n を n と $\log_\alpha r$ を用いて表せ.

(2)　等式 $b_n = \dfrac{n+2}{n+1}$ がすべての自然数 n について成り立つための必要十分条件を r と α を用いて表せ.

(3)　(2) の条件が成り立つとき，積 $a_1a_2, a_1a_2a_3, a_1a_2a_3a_4$ の整数部分がそれぞれ 2 桁，3 桁，4 桁になるような α の範囲を求めよ.

$\boxed{2}$ 円 $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ を考える．実数 p, q が $p^2 + q^2 > 1$ を満たすとき，点 $\mathrm{P}(p, q)$ から C_1 に引いた 2 本の接線 ℓ_1, ℓ_2 の接点をそれぞれ $\mathrm{Q}_1(x_1, y_1), \mathrm{Q}_2(x_2, y_2)$ とする．また，座標平面上の点 $\mathrm{O}(0, 0)$ とする．

(1)　直線 ℓ_1, ℓ_2, 線分 $\mathrm{OQ}_1, \mathrm{OQ}_2$ で囲まれた四角形の面積 S を p, q を用いて表せ．

(2)　点 P が楕円 $C_2 : \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ の上を動くとき，(1) の四角形の面積 S の最大値と最小値を求めよ．

$\boxed{3}$ 実数 a および自然数 n に対して，定積分 $I(a,n)=\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{ax}\sin(nx)dx$ を考える．ここで e は自然対数の底である．

(1)　$I(a,n)$ を求めよ．

(2)　$a_n=\dfrac{\log n}{2\pi}\quad(n=1,2,3,\dots)$ のとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I(a_n,n)$ を求めよ．ただし，$\log n$ は n の自然対数である．また，必要ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0$ であることを用いてもよい．

$\boxed{4}$　a を正の実数とする．

(1)　a が 1 でないとき，複素数 z についての方程式 $a|z-1| = |(a-2)z+a|$ を考える．この方程式を満たす z 全体の集合を複素数平面上に図示せよ．

(2)　方程式 $|z|^2 = 6-a, a|z-1| = |(a-2)z+a|$ をともに満たす複素数 z が存在するような a の範囲を求めよ．

$\boxed{5}$　n を 3 以上の整数とする．

(1)　k を整数とする．$k < a < b < c \leqq k+n$ を満たす整数 a, b, c の選び方の総数を n の式で表せ．

(2)　$1 \leqq a < b < c \leqq 2n$ を満たす整数 a, b, c のうち $a+b > c$ となる a, b, c の選び方の総数を L とする．このとき，$L > {}_n\mathrm{C}_3$ であることを示せ．

7 九州大学

7.1 文系

前期 数学 (文系) 配点 200 点 試験時間 120 分 令和 7 年 2 月 25 日 14 時 00 分-16 時 00 分実施

$\boxed{1}$ 2 つの曲線

$$y = x^3 + x^2 - x - 1, \quad y = x^2$$

の両方に接するすべての直線の方程式を求めよ.

$\boxed{2}$ 半径 1 の円周 C 上の 2 点 A, B は $\mathrm{AB} = \sqrt{3}$ をみたすとする．点 P が円周 C 上を動くとき，$\mathrm{AP}^2 + \mathrm{BP}^2$ の最大値を求めよ．

$\boxed{3}$　(文理共通)

以下の問いに答えよ．

(1)　n を整数とするとき，n^2 を 8 で割った余りは $0, 1, 4$ のいずれかであることを示せ．

(2)　$2^m = n^2 + 3$ をみたす 0 以上の整数の組 (m, n) をすべて求めよ．

$\boxed{4}$　(文理共通)

1 個のさいころを 3 回続けて投げ，出る目を順に a, b, c とする．整式 $f(x) = (x^2 - ax + b)(x - c)$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　$f(x) = 0$ をみたす実数 x の個数が 1 個である確率を求めよ．

(2)　$f(x) = 0$ をみたす自然数 x の個数が 3 個である確率を求めよ．

7.2　理系

前期 数学 (理系) 配点 250 点 試験時間 150 分 令和 7 年 2 月 25 日 14 時 00 分-16 時 30 分実施

$\boxed{1}$ 座標空間内の 3 点 $\mathrm{A}(1,1,-5), \mathrm{B}(-1,-1,7), \mathrm{C}(1,-1,3)$ を通る平面を α とする．点 $\mathrm{P}(a,b,t)$ を通り α に垂直な直線と xy 平面との交点を Q とする．

(1)　点 Q の座標を求めよ．

(2)　t がすべての実数値をとって変化するときの OQ の最小値が 1 以下となるような a, b の条件を求めよ．ただし，O は原点である．

$\boxed{2}$　以下の問いに答えよ．

(1)　$y = \tan x$ とするとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を y の整式で表せ．

(2)　次の定積分を求めよ．$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^4 x - \tan^2 x - 2}{\tan^2 x - 4} dx$

$\boxed{3}$　(文理共通)

以下の問いに答えよ．

(1)　n を整数とするとき，n^2 を 8 で割った余りは $0, 1, 4$ のいずれかであることを示せ．

(2)　$2^m = n^2 + 3$ をみたす 0 以上の整数の組 (m, n) をすべて求めよ．

$\boxed{4}$ 半径 1 の円周上に反時計回りに点 A, B, C, D を順にとり, 線分 AD は直径で, $\mathrm{AC} = \mathrm{CD}, \mathrm{AB} = \mathrm{BC}$ が成り立つとする.

(1) $\angle\mathrm{ACB}$ を求めよ.

(2) BC を求めよ.

(3) 線分 AC と線分 BD の交点を E とするとき, 三角形 BCE の面積を求めよ.

$\boxed{5}$　(文理共通)

1 個のさいころを 3 回続けて投げ，出る目を順に a, b, c とする．整式 $f(x) = (x^2 - ax + b)(x - c)$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　$f(x) = 0$ をみたす実数 x の個数が 1 個である確率を求めよ．

(2)　$f(x) = 0$ をみたす自然数 x の個数が 3 個である確率を求めよ．

8　一橋大学

前期 数学 試験時間 120 分 令和 7 年 2 月 25 日 14 時 00 分-16 時 00 分実施

$\boxed{1}$ 正の整数 n に対し，n の正の約数の個数を $d(n)$ とする．たとえば，6 の正の約数は $1, 2, 3, 6$ の 4 個なので，$d(6) = 4$ である．また

$$f(n) = \frac{d(n)}{\sqrt{n}}$$

とする．

(1)　$f(2025)$ を求めよ．

(2)　素数 p と正の整数 k の組で $f(p^k) \leqq f(p^{k+1})$ を満たすものを求めよ．

(3)　$f(n)$ の最大値と，そのときの n の値を求めよ．

$\boxed{2}$ 座標平面上に原点を中心とする半径 3 の円 C_1 がある．また，直線 $x=2$ 上の点 P を中心とする半径 1 の円を C_2 とする．

(1) C_1 と C_2 が共有点を 2 つ持つような点 P の y 座標の範囲を求めよ．

(2) C_1 と C_2 が共有点を 2 つ持つとき，その 2 つの共有点を通る直線を ℓ とする．ℓ に関して P と対称な位置にある点を Q とする．ただし，P が ℓ 上にあるときは Q = P とする．P の y 座標が (1) で求めた範囲を動くとき，点 Q の軌跡を求め，図示せよ．

$\boxed{3}$　等式

$$6\int_0^2 |x^2-a|dx = a^2-2a+k$$

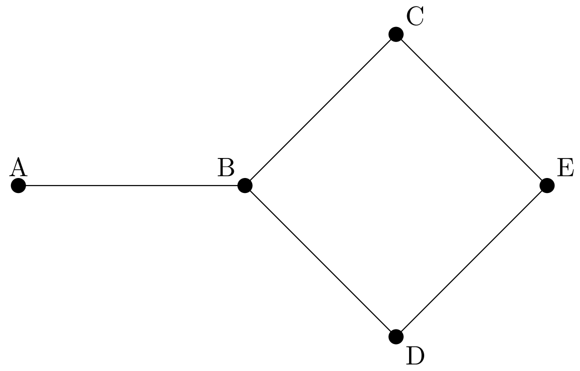
が成り立つ実数 a がちょうど 4 つ存在するような実数 k の範囲を求めよ．

$\boxed{4}$ 原点を O とする座標空間内の 2 点 $\mathrm{A}(0, 3, -5), \mathrm{B}(5, -2, 10)$ に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\}, \quad s \geqq 0, \quad \frac{1}{5} \leqq t \leqq \frac{3}{5}$$

で定まる点 P が存在する範囲を D とする．D に含まれる半径 $10\sqrt{2}$ の円のうち，その中心と原点との距離が最小となるものを C とする．円 C の中心の座標を求めよ．

$\boxed{5}$　5 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{E}$ が下図のように線分で結ばれている．点 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \ldots$ を次のように定めていく．P_1 を A とする．正の整数 n に対して，P_n を端点とする線分をひとつ無作為にえらび，その線分の P_n とは異なる端点を P_{n+1} とする．



(1)　$\mathrm{P_n}$ が A または B である確率 p_n を求めよ．

(2)　P_n が A または B であるとき，$k = 1, 2, \ldots, n$ のいずれに対しても $\mathrm{P}_k = \mathrm{E}$ とはならない条件付き確率 q_n を求めよ．

9　東京科学大学

9.1　理工学系

前期 数学 (理工学系) 配点 300 点 試験時間 180 分 令和 7 年 2 月 25 日 09 時 30 分-12 時 30 分実施

$\boxed{1}$　関数 $f(x)$ を $x \geqq 0$ に対して $f(x) = x\log(1+x)$ と定める．

(1)　不定積分 $\displaystyle\int x\log(1+x)dx$ を求めよ．

(2)　$y = f(x) \quad (x \geqq 0)$ の逆関数を $y = g(x) \quad (x \geqq 0)$ とする．また a, b を $g(a) = 1, g(b) = 2$ となる実数とする．このとき定積分

$$I = \int_a^b g(x)dx$$

の値を求めよ．

(3)　関数 $P(x)$ を $x \geqq 0$ に対して $P(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{1+f(t)}dt$ と定める．
このとき $y = P(x)$ について，定義域を $x \geqq 0$ とする逆関数 $y = Q(x)$ が微分可能であることは証明なしに認めてよい．関数 $R(x)$ を $x \geqq 0$ に対して

$$R(x) = \int_0^{P(x)} \frac{1}{Q'(v)}dv$$

と定めるとき，$R(x)$ を求めよ．

$\boxed{2}$ 空間の点 $(0,0,1)$ を通り $(1,-1,0)$ を方向ベクトルとする直線を ℓ とし，点 $(1,0,3)$ を通り $(0,1,-2)$ を方向ベクトルとする直線を m とする．

(1) P を ℓ 上の点とし，Q を m 上の点とする．また直線 PQ は直線 ℓ と直線 m に垂直であるとする．このとき P と Q の座標，および線分 PQ の長さを求めよ．

(2) ℓ 上に 2 点

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= (t, -t, 1) \\ \mathrm{B} &= (2+t+\sin t, -2-t-\sin t, 1) \end{aligned}$$

があり，m 上に 2 点

$$\begin{aligned} \mathrm{C} &= (1, t, 3-2t) \\ \mathrm{D} &= (1, 2+t+\cos t, -1-2t-2\cos t) \end{aligned}$$

があるとする．ただし，t は実数とする．四面体 ABCD の体積を $V(t)$ とする．$V(0)$ を求めよ．

(3) t が $t \geqq 0$ を動くとき，$V(t)$ の最大値と最小値を求めよ．

$\boxed{3}$　$0 < p < 1$ とする．表がでる確率が p，裏がでる確率が $1-p$ である 1 枚のコインを使って次のゲームを行う．

- ゲームの開始段階で点数は 0 点.
- コインを投げ続け，表が出るごとに 1 点加算し，裏が出たときは点数はそのまま.
- 2 回続けて裏が出たらゲームは終了.

0 以上の整数 n に対し，ゲームが終わったときに n 点となっている確率を Q_n とする．

(1)　Q_1, Q_2 を p を用いて表せ.

(2)　Q_n を n と p を用いて表せ.

(3)　$0 < x < 1$ を満たす実数 x に対して次式が成り立つことを示せ.

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

必要ならば $0 < x < 1$ のとき $\lim_{n \to \infty} nx^n = 0$ であることを証明なしで使ってもよい.

(4)　無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} nQ_n$ を p を用いて表せ.

$\boxed{4}$　数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = a_2 = 1$$
$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

により定め，数列 $\{b_n\}$ を

$$\tan b_n = \frac{1}{a_n}$$

により定める．ただし，$0 < b_n < \dfrac{\pi}{2}$ であるものとする．

(1)　$n \geqq 2$ に対して，$a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2$ を求めよ．

(2)　$m \geqq 1$(m は整数) に対して，$a_{2m} \cdot \tan(b_{2m+1} + b_{2m+2})$ を求めよ．

(3)　無限級数 $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} b_{2m+1}$ を求めよ．

$\boxed{5}$ (1)　関数

$$f(t) = \frac{t^2 - 1}{t^3} \quad (t \neq 0)$$

の増減を調べ，グラフの概形をかけ．

(2)　実数 x, y, z が，条件

$$\begin{cases} x < y < z \\ xyz \neq 0 \\ x^3y^2 - x^3 = x^2y^3 - y^3 \\ y^3z^2 - y^3 = y^2z^3 - z^3 \end{cases}$$

を満たしながら動くとき，x が取り得る値の範囲を求めよ．

9.2　医歯学系 (医)

前期 数学 (医歯学系・医学部) 配点 120 点 試験時間 90 分 令和 7 年 2 月 25 日 09 時 30 分-11 時 00 分実施

$\boxed{1}$ (医歯学共通)

20 個の合同な正三角形の面を持ち，各頂点に 5 つの面が集まるへこみのない多面体を，正二十面体という．各面に 20 種類の異なる目が 1 つずつ与えられており，すべての目が等しい確率で出る正二十面体のサイコロを I とする．I の 2 つの面 A, B に対し，I の表面上を，A の内部の点から B の内部の点へ，I の頂点を通らずに移動するとき，横切る I の辺の本数の最小値を $d(A, B)$ とする．たとえば，A と B が 1 辺を共有しているとき，$d(A, B) = 1$ となる．また，I の任意の面 A に対し，$d(A, A) = 0$ とする．さらに，I を n 回投げたとき，i 回目に出た目に対応する面を F_i とし，$n \geqq 2$ のとき，$d(F_i, F_j) \quad (1 \leqq i < j \leqq n)$ の最大値を M，最小値を m とする．このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) xyz 空間において，I の 1 つの面と xy 平面が平行となるように I を配置したとき，I の頂点または辺上の点を通り z 軸に平行な直線と xy 平面の交点全体の集合がなす図形を I' とする．I' の概形を描け．ただし，I' における線分どうしの長さの比やなす角の角度は正確でなくてもよい．

(2) $n = 2$ のとき，0 以上の整数 k に対し，$d(F_i, F_j) = k$ となる確率を P_k とする．$P_k > 0$ となるすべての k に対して，それぞれ P_k を求めよ．

(3) $n = 3$ のとき，$M \geqq 3$ となる確率を求めよ．

(4) $n \geqq 3$ のとき，$m \geqq 3$ となる確率を求めよ．

(5) $n \geqq 10$ のとき，$1 \leqq m \leqq M \leqq 4$ となる確率を求めよ．

$\boxed{2}$　(医歯学共通)

xy 平面上に 3 点 $\mathrm{O}(0,0), \mathrm{A}(2,4), \mathrm{B}(3,7)$ をとる．さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = m\overrightarrow{\mathrm{OA}} + n\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる整数 m, n が存在するような xy 平面上の点 P 全体の集合を L とする．このとき，以下の各問いに答えよ．

(1)　$\mathrm{P}_1(1,1), \mathrm{P}_2(2,1), \mathrm{P}_3(3,1)$ は L に属するか．それぞれ判定せよ．

(2)　L に属する点のうち，x 軸上にあるものをすべて求めよ．

(3)　2 点 A', B' を L の要素とする．L の任意の要素 P に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = m'\overrightarrow{\mathrm{OA}'} + n'\overrightarrow{\mathrm{OB}'}$ となる整数 m', n' が存在するとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}'}| + |\overrightarrow{\mathrm{OB}'}|$ の最小値を求めよ．

(4)　任意の L の要素 P に対して，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ が整数となるような xy 平面上の点 Q 全体の集合を M とする．M の要素のうち，x 座標および y 座標の絶対値がともに 1 以下であるものをすべて求めよ．

$\boxed{3}$　(医歯学一部共通)

a を 1 より大きい実数とし，xy 平面上の曲線 $C_1 : y = a^x$ および曲線 $C_2 : y = \log_a x$ について考える．原点を O とし，C_1 上に点 P，C_2 上に点 Q をとる．このとき，以下の各問いに答えよ．

(1)　O を通る傾き k の直線が C_1 に接するとき，a の値を k を用いて表せ．また，接点の座標を a を用いて表せ．

(2)　O を通る直線が C_2 に接するとき，接点の座標を a を用いて表せ．

(3)　△OPQ が正三角形となるような P, Q の組の個数を，a の値で場合分けして求めよ．

9.3　医歯学系 (歯)

前期 数学 (医歯学系･歯学部) 配点 120 点 試験時間 90 分 令和 7 年 2 月 25 日 09 時 30 分-11 時 00 分実施

$\boxed{1}$ (医歯学共通)

20 個の合同な正三角形の面を持ち，各頂点に 5 つの面が集まるへこみのない多面体を，正二十面体という．各面に 20 種類の異なる目が 1 つずつ与えられており，すべての目が等しい確率で出る正二十面体のサイコロを I とする．I の 2 つの面 A, B に対し，I の表面上を，A の内部の点から B の内部の点へ，I の頂点を通らずに移動するとき，横切る I の辺の本数の最小値を $d(A, B)$ とする．たとえば，A と B が 1 辺を共有しているとき，$d(A, B) = 1$ となる．また，I の任意の面 A に対し，$d(A, A) = 0$ とする．さらに，I を n 回投げたとき，i 回目に出た目に対応する面を F_i とし，$n \geqq 2$ のとき，$d(F_i, F_j) \quad (1 \leqq i < j \leqq n)$ の最大値を M，最小値を m とする．このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) xyz 空間において，I の 1 つの面と xy 平面が平行となるように I を配置したとき，I の頂点または辺上の点を通り z 軸に平行な直線と xy 平面の交点全体の集合がなす図形を I' とする．I' の概形を描け．ただし，I' における線分どうしの長さの比やなす角の角度は正確でなくてもよい．

(2) $n = 2$ のとき，0 以上の整数 k に対し，$d(F_i, F_j) = k$ となる確率を P_k とする．$P_k > 0$ となるすべての k に対して，それぞれ P_k を求めよ．

(3) $n = 3$ のとき，$M \geqq 3$ となる確率を求めよ．

(4) $n \geqq 3$ のとき，$m \geqq 3$ となる確率を求めよ．

(5) $n \geqq 10$ のとき，$1 \leqq m \leqq M \leqq 4$ となる確率を求めよ．

$\boxed{2}$　(医歯学共通)

xy 平面上に 3 点 $\mathrm{O}(0,0), \mathrm{A}(2,4), \mathrm{B}(3,7)$ をとる．さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = m\overrightarrow{\mathrm{OA}} + n\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる整数 m, n が存在するような xy 平面上の点 P 全体の集合を L とする．このとき，以下の各問いに答えよ．

(1)　$\mathrm{P}_1(1,1), \mathrm{P}_2(2,1), \mathrm{P}_3(3,1)$ は L に属するか．それぞれ判定せよ．

(2)　L に属する点のうち，x 軸上にあるものをすべて求めよ．

(3)　2 点 A', B' を L の要素とする．L の任意の要素 P に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = m'\overrightarrow{\mathrm{OA}'} + n'\overrightarrow{\mathrm{OB}'}$ となる整数 m', n' が存在するとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}'}| + |\overrightarrow{\mathrm{OB}'}|$ の最小値を求めよ．

(4)　任意の L の要素 P に対して，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ が整数となるような xy 平面上の点 Q 全体の集合を M とする．M の要素のうち，x 座標および y 座標の絶対値がともに 1 以下であるものをすべて求めよ．

$\boxed{3}$ (医歯学一部共通)

a を 1 より大きい実数とし，xy 平面上の曲線 $C_1 : y = a^x$ および曲線 $C_2 : y = \log_a x$ について考える．原点を O とし，C_1 上に点 P，C_2 上に点 Q をとる．このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) O を通る傾き k の直線が C_1 に接するとき，a の値を k を用いて表せ．また，接点の座標を a を用いて表せ.

(2) O を通る直線が C_2 に接するとき，接点の座標を a を用いて表せ.

(3) P, Q をどのようにとっても △OPQ が正三角形とならないような a の範囲を求めよ.

(4) △OPQ が正三角形となるような P, Q の組がちょうど 3 個存在するような a の値を求めよ.

10　神戸大学

10.1　文系

前期 数学 (文科系) 配点 75 点 試験時間 80 分 令和 7 年 2 月 25 日 11 時 50 分-13 時 10 分実施

$\boxed{1}$　a を実数とする．$f(x) = 2x^3 + ax^2 - 1$ とおくとき，以下の問に答えよ．

(1)　方程式 $f(x) = 0$ は $x = -1$ を解にもつとする．このとき，a の値を求め，方程式 $f(x) = 0$ の解をすべて求めよ．

(2)　a の値を (1) で求めたものとする．関数 $f(x)$ の極値を求めよ．

(3)　方程式 $f(x) = 0$ が異なる 3 つの実数解をもつような a の値の範囲を求めよ．

$\boxed{2}$ 実数 a に対して，a を超えない最大の整数を k とするとき，$a-k$ を a の小数部分という．n を自然数とし，$a_n=\sqrt{n^2+1}$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) $a_n < n+1$ が成り立つことを示せ.

(2) b_n を a_n の小数部分とする．b_n を n を用いて表せ.

(3) b_n を (2) で定めたものとする．m, n を異なる 2 つの自然数とするとき，$b_m \neq b_n$ であることを示せ.

$\boxed{3}$ 1 個のさいころを 2 回続けて投げるとき，出た目の数を順に a, b とおく．座標平面上の 2 点 A, B を

$$\mathrm{A}\left(\cos\frac{a}{6}\pi, \sin\frac{a}{6}\pi\right), \mathrm{B}\left(\cos\frac{b+6}{6}\pi, \sin\frac{b+6}{6}\pi\right)$$

とし，原点を O とする．以下の問に答えよ．

(1)　3 点 O, A, B が一直線上にある確率を求めよ．

(2)　3 点 O, A, B が一直線上になく，かつ三角形 OAB の面積が $\frac{1}{4}$ 以下である確率を求めよ．

(3)　2 点 A, B 間の距離が 1 より大きい確率を求めよ．

10.2　理系

前期 数学 (理科系) 配点 150 点 試験時間 120 分 令和 7 年 2 月 25 日 11 時 50 分-13 時 50 分実施

$\boxed{1}$　k を実数とする．$f(x)$ と $g(x)$ を

$$f(x) = |x^3 - x|, \quad g(x) = k(x+1)$$

とおき，曲線 $y = f(x)$ を C，直線 $y = g(x)$ を ℓ とする．以下の問に答えよ．

(1)　曲線 C の概形をかけ．ただし，関数 $f(x)$ の極大値を調べる必要はない．

(2)　曲線 C と直線 ℓ がちょうど 4 つの共有点をもつような k の値を求めよ．

$\boxed{2}$ 実数 a に対して，a を超えない最大の整数を k とするとき，$a-k$ を a の小数部分という．n を自然数とし，$a_n = \sqrt{n^2+1} - n$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) $0 < a_n < 1$ が成り立つことを示せ．

(2) b_n を $\left(3n - \dfrac{1}{a_n}\right)$ の小数部分とする．b_n を n を用いて表せ．

(3) b_n を (2) で定めたものとする．m, n を異なる 2 つの自然数とするとき，$a_m + b_n \neq 1$ であることを示せ．

$\boxed{3}$ 媒介変数 θ を用いて

$$x = \sin\theta, \quad y = \cos\theta + |\sin\theta| \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

で表される曲線を C とする．以下の問に答えよ．

(1) 曲線 C の概形をかけ．

(2) 曲線 C で囲まれた部分の面積を求めよ．

$\boxed{4}$　s, t を実数とする．座標空間に 3 点

$$\mathrm{A}(-4, -1, 0), \quad \mathrm{B}(-3, 0, -1), \quad \mathrm{P}(s, t, -2s+t-1)$$

がある．以下の問に答えよ．

(1)　3 点 A, B, P は一直線上にないことを示せ．

(2)　点 P から直線 AB に下ろした垂線を PH とする．点 H の座標を s を用いて表せ．

(3)　s, t が変化するとき，三角形 ABP の面積の最小値を求めよ．

$\boxed{5}$ 連続関数 $f(x)$ は $x \geqq 0$ で $f(x) \geqq 0$ を満たし，$x > 0$ で微分可能であり，その導関数 $f'(x)$ は連続であるとする．$t \geqq 1$ を満たす t に対して，原点 O と点 $\mathrm{P}(t, f(t))$ の距離を $g(t)$ とする．また，$t > 1$ を満たす t に対して，$y = f(x) \quad (1 \leqq x \leqq t)$ で表される曲線の長さを $h(t)$ とし，$t = 1$ のときは $h(1) = 0$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $t > 1$ とする．開区間 $(1, t)$ で常に $f(x) - xf'(x) = 0$ が成り立つならば，閉区間 $[1, t]$ で $\dfrac{f(x)}{x}$ は定数であることを示せ．

(2) $t \geqq 1$ を満たす任意の t に対して，$g(t) = h(t) + 2$ が成り立つとする．このとき，$f(1)$ の値を求めよ．また，$t \geqq 1$ のとき $f(t)$ を t を用いて表せ．