MathAbyss

$$\mathrm{lo}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\,y$$

みなさんは，「平均」についてどれくらい知っていますか？
あなたがまだ知らない，「平均」の奥深い世界をご紹介します．

MathAbyss

知られざる「平均」の世界

MathAbyss

知られざる「平均」の世界

この動画では，様々な種類の「平均」を紹介し，
その魅力に迫っていきたいと思います．

1. イントロダクション

1. イントロダクション

はじめに，この動画の構成を紹介していきます．

1.イントロダクション
2.統計学の平均
3.ピタゴラス平均
4.ピタゴラス平均の拡張
5.その他の2数の平均
6.まとめ

1.イントロダクション
2.統計学の平均
3.ピタゴラス平均
4.ピタゴラス平均の拡張
5.その他の2数の平均
6.まとめ

この動画は，6個のチャプターによって構成されています．

1.イントロダクション
2.統計学の平均
3.ピタゴラス平均
4.ピタゴラス平均の拡張
5.その他の2数の平均
6.まとめ

まず，次のチャプターでは，統計学における平均を紹介します．

1.イントロダクション
2.統計学の平均
3.ピタゴラス平均
4.ピタゴラス平均の拡張
5.その他の2数の平均
6.まとめ

次に，数学において重要な「ピタゴラス平均」を取り上げ，
それを一般化するとどうなるのかについて見ていきます．

1. イントロダクション
2. 統計学の平均
3. ピタゴラス平均
4. ピタゴラス平均の拡張
5. その他の2数の平均
6. まとめ

最後に，その他のマニアックな平均を一挙に紹介していきます．

1.イントロダクション
2.統計学の平均
3.ピタゴラス平均
4.ピタゴラス平均の拡張
5.その他の2数の平均
6.まとめ

それでは，知られざる「平均」の世界を探索していきましょう！

2. 統計学の平均

2. 統計学の平均

まずは，統計学における「平均」について見ていきましょう．

2. 統計学の平均

2. 統計学の平均

- 相加平均(算術平均)
- 中央値(メジアン)
- 最頻値(モード)
- Interquartile mean(四分位平均)
- ミッドレンジ
- ミッドヒンジ
- Trimean

2. 統計学の平均

- 相加平均(算術平均)
- 中央値(メジアン)
- 最頻値(モード)
- Interquartile mean(四分位平均)
- ミッドレンジ
- ミッドヒンジ
- Trimean

ここでは，統計学で用いられる「平均」として，
上の7つを紹介します．

2. 統計学の平均

それぞれの「平均」を見ていく前に，
その前提となる「設定」についてお話します．

$$\text{データ} : x_1, x_2, \cdots, x_n$$

このチャプターでは，
$x_1, x_2, \dots, x_n$のn個の実数の観測値からなるデータに対して，
「平均」を考えます．

$$\text{データ}: x_1, x_2, \cdots, x_n$$

統計学では，無限個の観測値からなるデータや，
観測値が連続的に分布するデータの平均を考えることもありますが，
この動画は「平均の多様性」を伝えることを目的としておりますので
省略させていただきます．

2. 統計学の平均

それでは本題に戻って，様々な「平均」を見ていくことにしましょう．

相加平均

1つ目は「相加平均(算術平均)」です．

相加平均

相加平均は「平均」の最も代表的な例と言っても過言ではありません．
ご存じの方は多いと思いますが，改めて紹介しておきます．

相加平均(算術平均)

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

相加平均はこのように定義されます．

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

観測値の総和を，観測値の個数で割ることによって
求めることができる値です．

中央値

2つ目は「中央値(メジアン)」です．

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$$

中央値を考える場合は，観測値を小さい順に並べる必要があります．
すなわち，順序統計量を考えることになります．

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$$

中央値を考える場合は，観測値を小さい順に並べる必要があります．
すなわち，順序統計量を考えることになります．

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$$

$$\begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & (n\text{が奇数}) \\ \dfrac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right) & (n\text{が偶数}) \end{cases}$$

この順序統計量に対して，中央値は上のように定義されます．
観測値の数の偶奇によって場合分けが生じることに注意が必要です．

中央値(メジアン)

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$$

$$\begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & (n\text{が奇数}) \\ \dfrac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right) & (n\text{が偶数}) \end{cases}$$

中央値は，その名の通り，観測値を小さい順に並べたときに，ちょうど中央に位置する観測値(またはそれに相当する値)のことです．

最頻値

3つ目は「最頻値(モード)」です．

最も頻繁に登場する観測値

最頻値は，その名の通り，最も頻繁に登場する観測値のことです．

最も頻繁に登場する観測値

これを数学的に定義すると，少々複雑になります．

$$I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$$

まず，以降の議論を簡単にするため，
1以上n以下の整数全体の集合I_nを定義します．

$$I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$$

まず，以降の議論を簡単にするため，
1以上n以下の整数全体の集合I_nを定義します．

$$I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$$

$$S_i = \{j \in I_n \mid x_i = x_j\} \quad (i \in I_n)$$

次に，各観測値x_iに対して，x_iと等しい観測値全体の集合S_iを定義します．

$$I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$$

$$S_i = \{j \in I_n \mid x_i = x_j\} \quad (i \in I_n)$$

次に，各観測値x_iに対して，x_iと等しい観測値全体の集合S_iを定義します．

$$I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$$

$$S_i = \{j \in I_n \mid x_i = x_j\} \quad (i \in I_n)$$

$$\{x_j \mid {}^{\forall} i \in I_n,\ \sharp S_j \geq \sharp S_i\ (j \in I_n)\}$$

↑この集合の元

そして，集合$S_1, S_2, \ldots, S_n$のうち，元の個数が最も大きい集合を取り出し，その集合の元である観測値を，データの最頻値と定義します．

Interquartile mean

ここからは馴染みのある人が少ない「平均」を紹介していきます．
4つ目は「Interquartile mean(四分位平均)」です．

Interquartile mean

↑四分位の ↑平均

Interquartileは「四分位」を意味し，meanは「平均」を意味します．

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$$

Interquartile meanについても，中央値と同様に，
順序統計量を考えます．

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$$

Interquartile meanについても，中央値と同様に，
順序統計量を考えます．

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$$

$$\frac{2}{n} \sum_{i=\frac{n}{4}+1}^{\frac{3n}{4}} x_i$$

Interquartile meanは，nが4の倍数であるときは，
上の式のように定義します．

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$$

$$\frac{2}{n} \sum_{i=\frac{n}{4}+1}^{\frac{3n}{4}} x_i$$

nが4の倍数でないときは，
重み付けされた観測値の平均として定義されます．

Interquartile mean(四分位平均)

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$$

$$\frac{2}{n} \sum_{i=\frac{n}{4}+1}^{\frac{3n}{4}} x_i$$

これ以上は場合分けや定義式が複雑になるため省略します．

ミッドレンジ

5つ目は「ミッドレンジ」です．

$$\frac{1}{2}\left(\min_i x_i + \max_i x_i\right)$$

ミッドレンジは，データの最小値と最大値の平均として定義されます．

ミッドヒンジ

そして，これと似た名前の概念として，
6つ目に紹介する「ミッドヒンジ」があります．

$$\frac{1}{2}(Q_1 + Q_3)$$

ミッドヒンジは，第1四分位数と第3四分位数の平均として定義されます．

Trimean

これをさらに変形した「平均」が
7つ目に紹介する「Trimean」です．

Trimean

↑3つ(四分位数)の

Triは「3つ」という意味があります．
ここでいう「3つ」とは，四分位数のことを指します．

$$\frac{1}{4}(Q_1 + 2Q_2 + Q_3)$$

Trimeanは，第1四分位数，中央値の2倍，第3四分位数の平均として定義されます．

2. 統計学の平均

- 相加平均(算術平均)
- 中央値(メジアン)
- 最頻値(モード)
- Interquartile mean(四分位平均)
- ミッドレンジ
- ミッドヒンジ
- Trimean

このように，統計学で用いられる「平均」には様々な種類があるのです．

MathAbyss

3. ピタゴラス平均

3. ピタゴラス平均

次に，重要な「ピタゴラス平均」について紹介します．

3. ピタゴラス平均

3. ピタゴラス平均

- 相加平均(算術平均)
- 相乗平均(幾何平均)
- 調和平均
- ピタゴラス平均の不等式

3. ピタゴラス平均

- 相加平均(算術平均)
- 相乗平均(幾何平均)
- 調和平均
- ピタゴラス平均の不等式

ここでは，ピタゴラス平均と呼ばれる3つの平均と，
その間に成り立つ不等式について紹介します．

3. ピタゴラス平均

3. ピタゴラス平均

まずは，先ほどのチャプターと同様に，
「設定」を与えておきます．

3. ピタゴラス平均

$$x_1, x_2, \ldots, x_n : \text{正の実数}$$

このチャプターでは，
$x_1, x_2, \ldots, x_n$のn個の正の実数に対して，
「平均」を考えていきます．

相加平均

1つ目は「相加平均(算術平均)」です．

相加平均

これについては前のチャプターでも登場しましたが，
重要な平均ですので，改めて解説しておきます．

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

相加平均は，n個の正の実数の総和を，
その個数nで割ったものとして定義される値です．

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

このチャプターでは$x_1, x_2, \ldots, x_n$を正の実数としていますが，
相加平均は$x_1, x_2, \ldots, x_n$を実数とした場合についても定義されます．

相乗平均

2つ目は「相乗平均(幾何平均)」です．

相乗平均

相乗平均は高校数学でも登場するので，
馴染みがある方も多いでしょう．

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

相乗平均は，n個の正の実数の総積の，
その個数nの逆数乗として定義される値です．

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

相加平均は和を，相乗平均は積をとることで，「全体量」を考えています．
相加平均はそれを個数で割り，相乗平均はそれの個数乗根をとることで，
「全体量」を均し，「中央付近の値」を出しているわけです．

調和平均

3つ目は「調和平均」です．

調和平均

先ほど紹介した2つの平均と比べると，マイナーな平均かもしれません．

$$n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)^{-1}=\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$$

調和平均は，逆数の相加平均の逆数として定義される値です．

$$n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)^{-1}=\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$$

このような平均を考える利点について補足しておきましょう．

A駅からB駅までの道のりは600 mです.
Xさんは，A駅からB駅まで分速60 mで進み，
B駅からA駅まで分速40 mで進んで往復します.
このとき，Xさんは平均して分速何メートルで往復するでしょうか.

このような問題を考えてみましょう.

A駅からB駅までの道のりは600mです.
Xさんは，A駅からB駅まで分速60mで進み，
B駅からA駅まで分速40mで進んで往復します.
このとき，Xさんは平均して分速何メートルで往復するでしょうか.

この問題の答えは分速50mではありません.

A駅からB駅までの道のりは600mです.
Xさんは，A駅からB駅まで分速60mで進み,
B駅からA駅まで分速40mで進んで往復します.
このとき，Xさんは平均して分速何メートルで往復するでしょうか.

丁寧に解いてみましょう.

A駅からB駅までの道のりは600 mです．
Xさんは，A駅からB駅まで分速60mで進み，
B駅からA駅まで分速40mで進んで往復します．
このとき，Xさんは平均して分速何メートルで往復するでしょうか．

A駅からB駅までの道のりは600mです.
Xさんは，A駅からB駅まで分速60mで進み,
B駅からA駅まで分速40mで進んで往復します.
このとき，Xさんは平均して分速何メートルで往復するでしょうか.

$$\frac{600\ (\mathrm{m})}{60\ (\mathrm{m/min})} = 10\ (\mathrm{min})$$

A駅からB駅まで進むのに要する時間は10分で，

A駅からB駅までの道のりは600mです.
Xさんは，A駅からB駅まで分速60mで進み，
B駅からA駅まで分速40mで進んで往復します.
このとき，Xさんは平均して分速何メートルで往復するでしょうか.

$$\frac{600\ (\mathrm{m})}{40\ (\mathrm{m/min})} = 15\ (\mathrm{min})$$

B駅からA駅まで進むのに要する時間は15分です.

A駅からB駅までの道のりは600mです．
Xさんは，A駅からB駅まで分速60mで進み，
B駅からA駅まで分速40mで進んで往復します．
このとき，Xさんは平均して分速何メートルで往復するでしょうか．

$$10\ (\mathrm{min}) + 15\ (\mathrm{min}) = 25\ (\mathrm{min})$$

つまり，Xさんは25分で往復することが分かります．

A駅からB駅までの道のりは600mです.
Xさんは，A駅からB駅まで分速60mで進み，
B駅からA駅まで分速40mで進んで往復します.
このとき，Xさんは平均して分速何メートルで往復するでしょうか.

$$600\ (\mathrm{m}) \times 2 = 1200\ (\mathrm{m})$$

A駅とB駅の間は往復1200mですから，

A駅からB駅までの道のりは600mです.
Xさんは，A駅からB駅まで分速60mで進み，
B駅からA駅まで分速40mで進んで往復します.
このとき，Xさんは平均して分速何メートルで往復するでしょうか.

$$\frac{1200\ (\mathrm{m})}{25\ (\mathrm{min})} = 48\ (\mathrm{m/min})$$

Xさんの平均の速さは，分速48mであることが分かりました.

A駅からB駅までの道のりは600 mです.
Xさんは，A駅からB駅まで分速60mで進み，
B駅からA駅まで分速40mで進んで往復します.
このとき，Xさんは平均して分速何メートルで往復するでしょうか.

この問題を一般化してみましょう.

3. ピタゴラス平均

調和平均

A駅からB駅までの道のりは600mです．
Xさんは，A駅からB駅まで分速60mで進み，
B駅からA駅まで分速40mで進んで往復します．
このとき，Xさんは平均して分速何メートルで往復するでしょうか．

A駅からB駅までの道のりは x mです.
Xさんは，A駅からB駅まで分速 a mで進み，
B駅からA駅まで分速 b mで進んで往復します.
このとき，Xさんは平均して分速何メートルで往復するでしょうか.

先程と同様に解くと

A駅からB駅までの道のりは x mです.
Xさんは，A駅からB駅まで分速 a mで進み，
B駅からA駅まで分速 b mで進んで往復します.
このとき，Xさんは平均して分速何メートルで往復するでしょうか.

$$\mathrm{A} \to \mathrm{B} : \frac{x}{a}\ (\mathrm{min}) \qquad \mathrm{B} \to \mathrm{A} : \frac{x}{b}\ (\mathrm{min})$$

往復 $2x$ (m) を $\dfrac{x}{a} + \dfrac{x}{b}$ (min) で進む

A駅からB駅までの道のりは x mです.
Xさんは，A駅からB駅まで分速 a mで進み，
B駅からA駅まで分速 b mで進んで往復します.
このとき，Xさんは平均して分速何メートルで往復するでしょうか.

$$\frac{2x}{\frac{x}{a}+\frac{x}{b}}=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\ (\mathrm{m/min})$$

よって，求める答えはaとbの調和平均になっています.

A駅からB駅までの道のりは x mです.
Xさんは，A駅からB駅まで分速 a mで進み，
B駅からA駅まで分速 b mで進んで往復します.
このとき，Xさんは平均して分速何メートルで往復するでしょうか.

$$\frac{2x}{\frac{x}{a}+\frac{x}{b}}=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\ (\mathrm{m/min})$$

このように，調和平均は自然界に現れる，実用的な平均なのです.

相加平均
相乗平均
調和平均

さて，ここまで見てきたこれら3つの平均はとても重要です．

ピタゴラス平均
- 相加平均
- 相乗平均
- 調和平均

3. ピタゴラス平均

ピタゴラス平均

- 相加平均
- 相乗平均
- 調和平均

これらをまとめて，「ピタゴラス平均」と呼びます．

ピタゴラス平均

- 相加平均
- 相乗平均
- 調和平均

相加平均
相乗平均
調和平均

さて，これらのピタゴラス平均ですが，

<u>A</u>rithmetic <u>M</u>ean

<u>G</u>eometric <u>M</u>ean

<u>H</u>armonic <u>M</u>ean

英語ではこのように呼ばれています.

AM:相加平均
GM:相乗平均
HM:調和平均

これらの頭文字を取って，それぞれこのように略記することがあります．

ピタゴラス平均の不等式

これを踏まえて，ピタゴラス平均の間に成り立つ
非常に重要な不等式を見ていきましょう．

$$\mathrm{AM} \geq \mathrm{GM} \geq \mathrm{HM}$$

ピタゴラス平均の間には，このような不等式が成り立ちます．

$$\mathrm{AM} \geq \mathrm{GM} \geq \mathrm{HM}$$

すなわち，ピタゴラス平均は，値が小さくない順に
相加平均，相乗平均，調和平均となるのです．

$$\mathrm{AM} \geq \mathrm{GM} \geq \mathrm{HM}$$

この動画では，この不等式が成り立つことの証明を
簡潔に解説していきます．

f：凸関数, $p_1, p_2, \ldots, p_n > 0 : \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$

イェンセンの不等式

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)}$$

様々な証明が知られていますが，この動画では，

最もオーソドックスな，イェンセンの不等式を用いた証明を紹介します．

$$f(x) = -\log x : \text{凸関数}$$

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \frac{1}{n} > 0 : \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

まず，凸関数として対数関数を考え，$p_1, p_2, \ldots, p_n$をこのようにとります．

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(-\log x_i) \geq -\log\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$$

これにイェンセンの不等式を適用すると，上の不等式を得ます．

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

指数関数の狭義単調増加性に注意して整理すると，
相加相乗平均の不等式(AM-GM不等式)を導くことができました．

$$y_i = \frac{1}{x_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \geq \left(\prod_{i=1}^{n} y_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

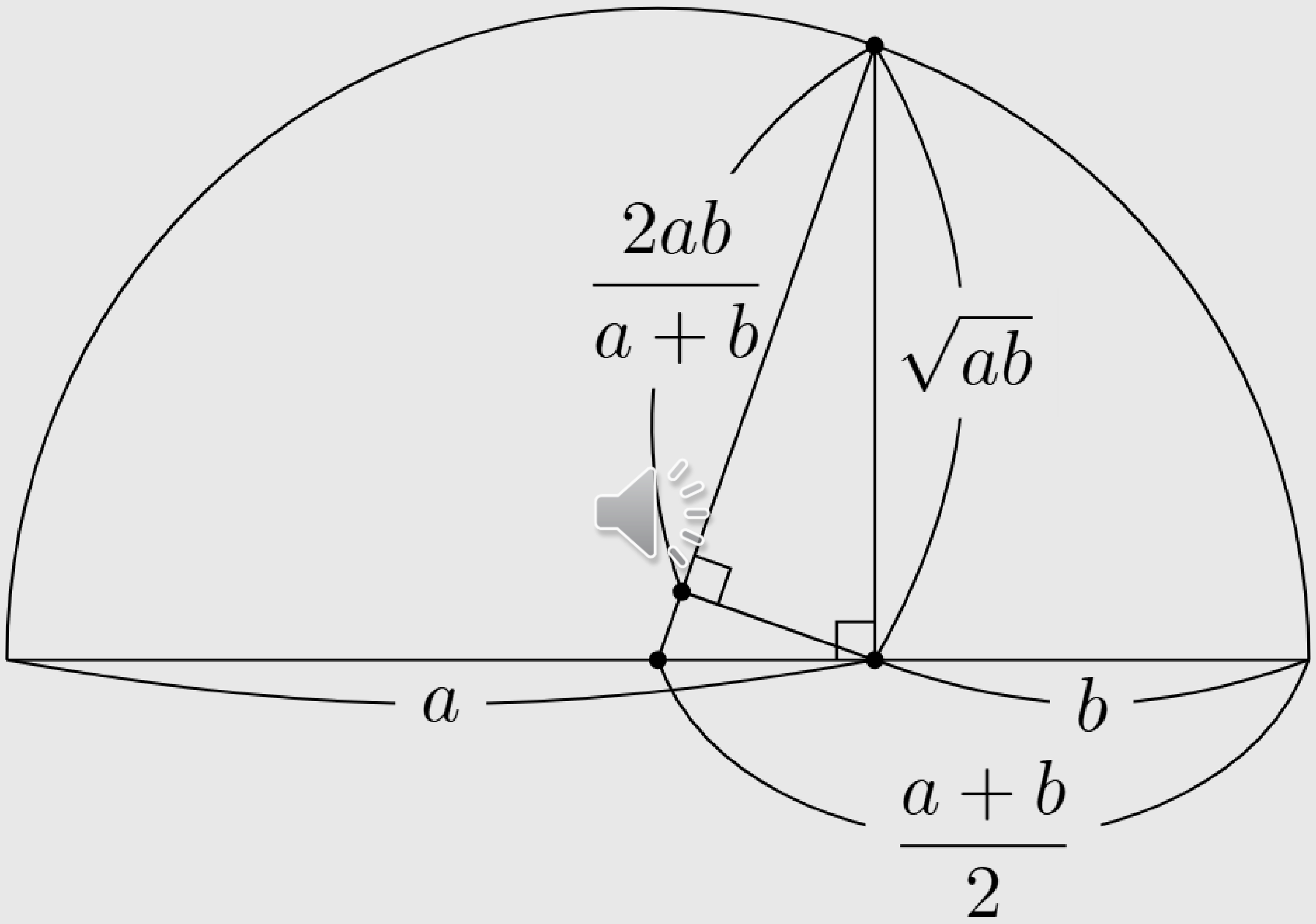
次に，$x_1, x_2, \ldots, x_n$の逆数について，先ほど導いた不等式を適用します．

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} \geq n\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right)^{-1}$$

これを整理すると，相乗平均と調和平均の不等式を導くことができます．

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

特に，2つの正の実数a, bについて，
ピタゴラス平均の不等式は上のようになります．



これは，上のように視覚的に理解することもできるのです．

3. ピタゴラス平均

- 相加平均(算術平均)
- 相乗平均(幾何平均)
- 調和平均
- ピタゴラス平均の不等式

ピタゴラス平均には，まだまだ面白い世界が広がっています．
次のチャプターでは，これらの「一般化」に焦点を当てていきます．

[illegible]

4. ピタゴラス平均の拡張

4. ピタゴラス平均の拡張

ここからは，
ピタゴラス平均を一般化した，新たな「平均」について見ていきます．

4. ピタゴラス平均の拡張

4. ピタゴラス平均の拡張

- ヘルダー平均(一般化平均)
  - 二乗平均平方根
  - 立方平均
  - 一般化f平均
    (Quasi-arithmetic mean，擬算術平均，準算術平均)
- 加重相加平均(加重算術平均)
- 加重相乗平均(加重幾何平均)
- Contraharmonic mean(逆調和平均，反調和平均)
- レーマー平均

4. ピタゴラス平均の拡張

- ヘルダー平均(一般化平均)
  - 二乗平均平方根
  - 立方平均
  - 一般化f平均
    (Quasi-arithmetic mean，擬算術平均，準算術平均)
- 加重相加平均(加重算術平均)
- 加重相乗平均(加重幾何平均)
- Contraharmonic mean(逆調和平均，反調和平均)
- レーマー平均

このチャプターでは，ピタゴラス平均の一般化に当たる，
上の5種類の平均を紹介していきます．

ヘルダー平均

ヘルダー平均

まずは，ピタゴラス平均の最も自然な一般化である，
「ヘルダー平均(一般化平均)」について見ていきます．

$$x_1, x_2, \cdots, x_n : \text{正の実数}$$

$$p : 0\text{でない実数}$$

定義の前に，設定を与えておきます．
以下， $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を n 個の正の実数， p を 0 でない実数とします．

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$の指数pのヘルダー平均は，上の式のように定義されます．

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

ヘルダー平均がピタゴラス平均の一般化であることを確かめてみましょう.

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$p=1\text{ のとき：相加平均}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$p=-1\text{ のとき：調和平均}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right)^{-1}$$

指数1のヘルダー平均が相加平均になり，
指数-1のヘルダー平均が調和平均になることは，簡単に分かります．

$$\lim_{p\to 0}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

相乗平均については，指数pを$p \to 0$としたときの，
ヘルダー平均の極限値に等しくなっています．

$$\lim_{p\to 0}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

ところで，この等式は本当に成り立つのでしょうか？

$$\log\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{p}\left(\log\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right) - \log n\right)$$

$$= \frac{1}{p}\left(\log\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right) - \log\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^0\right)\right)$$

$$\xrightarrow{p\to 0} \frac{d}{dp}\log\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)\Bigg|_{p=0}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^0\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^0 \log x_i\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log x_i = \log\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

これは，ヘルダー平均の対数をとり，微分係数の定義に帰着させることで，
上のような式変形により，極限値を求めることができます．

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

ここまでで，ヘルダー平均がピタゴラス平均の一般化であることには
納得していただけたと思います．

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

ヘルダー平均の(指数についての)特殊な場合として，
ピタゴラス平均が現れるわけですが，

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

他にも重要な「ヘルダー平均の特殊な場合」があるので，
これらを一気に紹介していきます．

二乗平均平方根

まず，「二乗平均平方根(RMS)」です．

ヘルダー平均(一般化平均)

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

二乗平均平方根は，指数2のヘルダー平均です．

交流の実効値の計算などに用いられています．

立方平均

次に，「立方平均」です．

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^3\right)^{\frac{1}{3}}$$

立方平均は，指数3のヘルダー平均です．
材料工学などで用いられています．

一般化f平均

最後に，ヘルダー平均のさらなる一般化，「一般化f平均」を紹介します．

一般化f平均

一般化f平均は，“Quasi-arithmetic mean”，「擬算術平均」，「準算術平均」とも呼ばれています．

$$f^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right)$$

一般化f平均は，上の式のように定義されます．

$$f^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right)$$

$$f(x) = x^p : \text{ヘルダー平均} \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$f(x) = \log x : \text{相乗平均} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

例えば，$f(x) = x^p$とするとヘルダー平均になり，$f(x) = \log x$とすると相乗平均が得られます．

加重相加平均

ピタゴラス平均の一般化2つ目は，「加重相加平均(加重算術平均)」です．

$$x_1, x_2, \ldots, x_n : 実数$$

$$w_1, w_2, \ldots, w_n : 実数$$

n個の実数$x_1, x_2, \ldots, x_n$に対して，
実数$w_1, w_2, \ldots, w_n$を「重み付け」するとき，

加重相加平均(加重算術平均)

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w_i x_i$$

$w_i x_i$の相加平均を，加重相加平均と定義します．

$$x_1, x_2, \ldots, x_n : \text{実数}$$

$$w_1, w_2, \ldots, w_n : \text{実数}$$

$w_1, w_2, \ldots, w_n$は「重要度」を表す数値として解釈することができます．

$w_1 = w_2 = \cdots = w_n = 1$のとき，加重相加平均は相加平均に一致します．

加重相乗平均

同様に，重み付けされた相乗平均が，「加重相乗平均(加重幾何平均)」です．

$$x_1, x_2, \ldots, x_n : \text{正の実数}$$

$$w_1, w_2, \ldots, w_n : \text{正の実数}$$

n個の正の実数$x_1, x_2, \ldots, x_n$に対して，
正の実数$w_1, w_2, \ldots, w_n$を「重み付け」するとき，

$$\left(\prod_{i=1}^{n} w_i x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

$w_i x_i$の相乗平均を，加重相乗平均と定義します．

$$x_1, x_2, \ldots, x_n : \text{正の実数}$$

$$w_1, w_2, \ldots, w_n : \text{正の実数}$$

$w_1 = w_2 = \cdots = w_n = 1$のとき，加重相乗平均は相乗平均に一致します．

Contraharmonic mean

ピタゴラス平均の一般化4つ目は，
「Contraharmonic mean(逆調和平均，反調和平均)」です．

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Contraharmonic meanは，n個の正の実数$x_1, x_2, \dots, x_n$に対して，平方和を総和で割った値として定義されます．

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Contraharmonic meanは，紀元前に発見されていたと言われており，
現在でも，統計学などで用いられています．

レーマー平均

そんなContraharmonic meanを一般化したものが「レーマー平均」です。

$$\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^p}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^{p-1}}$$

レーマー平均は，n個の正の実数$x_1, x_2, \ldots, x_n$に対して，
p乗和を$p-1$乗和で割った値として定義されます．

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^p}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{p-1}}$$

$p=0,1,2$のとき，レーマー平均は，それぞれ
調和平均，相加平均，Contraharmonic meanに一致します．

4. ピタゴラス平均の拡張

- ヘルダー平均(一般化平均)
  - 二乗平均平方根
  - 立方平均
  - 一般化f平均
    (Quasi-arithmetic mean，擬算術平均，準算術平均)
- 加重相加平均(加重算術平均)
- 加重相乗平均(加重幾何平均)
- Contraharmonic mean(逆調和平均，反調和平均)
- レーマー平均

ここまで，ピタゴラス平均を様々な角度で一般化してきました．

MathAbyss

5. その他の2数の平均

5. その他の2数の平均

最後に，さらにマニアックな「2数の平均」をいくつかご紹介します．

5. その他2数の平均

5. その他の2数の平均

- 相加平均と調和平均の相乗平均
- 対数平均
- ストラスキー平均
- 算術幾何平均/幾何調和平均/算術調和平均
- Heinz mean
- Heronian mean
- Neuman–Sándor mean

5. その他の2数の平均

- 相加平均と調和平均の相乗平均
- 対数平均
- ストラスキー平均
- 算術幾何平均/幾何調和平均/算術調和平均
- Heinz mean
- Heronian mean
- Neuman–Sándor mean

知る人ぞ知る平均の世界を，このようなラインナップで解説していきます．

相加平均と調和平均の相乗平均

まずは，ピタゴラス平均に関する話題を紹介します．

$$\frac{x+y}{2} \qquad \frac{2xy}{x+y}$$

2つの非負実数x, yに対して，相加平均と調和平均は上のようになります．

$$\sqrt{\frac{x+y}{2}\cdot\frac{2xy}{x+y}}=\sqrt{xy}$$

このとき，相加平均と調和平均の相乗平均を計算すると，
xとyの相乗平均に一致します．

$$\sqrt{\frac{x+y}{2}\cdot\frac{2xy}{x+y}}=\sqrt{xy}$$

これは，2つの正の実数に対してのみ成り立つ性質です．

対数平均

ここからは，マニアックな平均をいくつか紹介していきます．
1つ目は「対数平均」です．

$$\lim_{(p,q)\to(x,y)} \frac{p-q}{\log p - \log q}$$

2つの非負実数x, yの対数平均はこのように，極限を用いて定義されます．

$$
\begin{cases}
0 & (xy = 0) \\
x = y & (x = y) \\
\dfrac{x-y}{\log x - \log y} & (\text{otherwise})
\end{cases}
$$

対数平均は，このように整理することができます．

$$\sqrt{xy} \leq \lim_{(p,q)\to(x,y)} \frac{p-q}{\log p - \log q} \leq \frac{x+y}{2}$$

対数平均とピタゴラス平均の間には，このような不等式が成り立ちます．

ストラスキー平均

2つ目は「ストラスキー平均」です．

$$\lim_{(s,t)\to(x,y)} \sqrt[p-1]{\frac{s^p - t^p}{p(s-t)}}$$

2つの正の実数x, yのストラスキー平均は，
実数pをパラメータとして，このように定義されます．

$$\begin{cases} x = y & (x = y) \\ \sqrt[p-1]{\dfrac{x^p - y^p}{p(x-y)}} & (x \neq y) \end{cases}$$

ストラスキー平均は，相加平均･相乗平均･対数平均などを含む
一般化された平均になっており，

$$\frac{x^2 - y^2}{2(x-y)} = \frac{x+y}{2}$$

$$\sqrt{\frac{-(x-y)}{x^{-1} - y^{-1}}} = \sqrt{xy}$$

$$\lim_{p \to 0} \sqrt[p-1]{\frac{x^p - y^p}{p(x-y)}} = \frac{x-y}{\log x - \log y}$$

$p=2$のときは相加平均，$p=-1$のときは相乗平均，
$p \to 0$のときは対数平均に一致します．

$$\frac{1}{e}\left(\frac{x^x}{y^y}\right)^{\frac{1}{x-y}} = \exp\left(\frac{x\log x - y\log y}{x-y} - 1\right)$$

ちなみに，$p=1$のときのストラスキー平均は，
「アイデントリック平均」と呼ばれています．

算術幾何平均
幾何調和平均
算術調和平均

3つ目は「算術幾何平均」，「幾何調和平均」，「算術調和平均」です．

$$a_0 = a, \quad b_0 = b,$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad (n \geq 0)$$

正の実数a, bに対して，数列$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$をこのように定めます．

$$\frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}\right)^{-1}$$

このとき，$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$は同じ値に収束し，
この値を算術幾何平均として定義します．

$$a_0 = a, \quad b_0 = b,$$

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \quad (n \geq 0)$$

同様に，数列$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$をこのように定めると，

$$\frac{2ab}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}}\right)$$

$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$は同じ値に収束し，
この値を幾何調和平均として定義します．

$$a_0 = a, \quad b_0 = b,$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \quad (n \geq 0)$$

さらに，数列$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$をこのように定めると，

$$\sqrt{ab}$$

$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$はともに幾何平均に収束することから，
幾何平均は算術調和平均とも呼ばれます．

$$a, b \in \mathbb{C}; \left|\arg \frac{b}{a}\right| \neq \pi$$

算術幾何平均，幾何調和平均，算術調和平均は，
a, bを複素数に拡張することができます．

Heinz mean

4つ目は「Heinz mean」です.

$$\frac{a^x b^{1-x} + a^{1-x} b^x}{2}$$

非負実数a, bのHeinz meanは，
0以上$1/2$以上の実数xをパラメータとして，このように定義されます．

$$\frac{a^x b^{1-x} + a^{1-x} b^x}{2}$$

Heinz meanは，相加平均·相乗平均を一般化した平均になっており，

$$\frac{a^0 b^{1-0} + a^{1-0} b^0}{2} = \frac{a+b}{2}$$

$$\frac{a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}}{2} = \sqrt{ab}$$

$x = 0$のときは相加平均，$x = 1/2$のときは相乗平均に一致します．

Heronian mean

5つ目は「Heronian mean」です．

$$\frac{1}{3}\left(a+\sqrt{ab}+b\right)$$

非負実数a, bのHeronian meanは，このように定義されます．

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{a+b}{2}+\frac{1}{3}\sqrt{ab}$$

Heronian meanは，相加平均と相乗平均の加重相加平均と捉えることができ，

$$(\text{上面積と底面積の Heronian mean}) \times (\text{高さ})$$

角錐台や円錐台の体積を求めるときに用いられていました．

Neuman–Sándor mean

最後は「Neuman–Sándor mean」です．

$$\frac{a-b}{2\operatorname{arsinh}\frac{a-b}{a+b}}$$

異なる正の実数a, bのNeuman–Sándor meanは，
このように定義されます．

$$\frac{a+b}{2} \leq \frac{a-b}{2\,\mathrm{arsinh}\,\frac{a-b}{a+b}} \leq \frac{a-b}{2\,\mathrm{arctan}\,\frac{a-b}{a+b}}$$

Neuman–Sándor meanに関する
不等式の研究は現在も行われているそうです．

5. その他の2数の平均

- 相加平均と調和平均の相乗平均
- 対数平均
- ストラスキー平均
- 算術幾何平均/幾何調和平均/算術調和平均
- Heinz mean
- Heronian mean
- Neuman–Sándor mean

ここまで，多種多様な平均をご紹介しました．

6. まとめ

6. まとめ

いかがでしたか？

この動画では，様々な種類の「平均」と，その性質をご紹介しました．

この動画で紹介しきれなかった平均や，
詳細を省略してしまった内容もありますが，
楽しんでいただけたでしょうか？

MathAbyssでは，数学に関する記事を公開しているWebサイト
「MathAbyss」を運営しております．

今後も様々な動画を制作していきますので，
この動画に対する高評価，YouTubeのチャンネル登録を
よろしくお願いします！

note，TikTok，Xなどのフォローもしていただけると励みになります！

最後までご視聴いただき，ありがとうございました！！！

MathAbyss

ご視聴ありがとうございました！
チャンネル登録よろしくお願いします！