MathAbyss

みなさんは，$\sqrt{2}$が無理数であることを証明できますか？
教科書に載っているものだけではない，
驚くべき14の証明をご紹介します．

MathAbyss

$\sqrt{2}$が無理数であることを14通りの方法で証明してみた

1. イントロダクション

1. イントロダクション

はじめに，この動画の構成を紹介していきます．

1. イントロダクション
2. $\sqrt{2}$はどのような数か
3. 代数的な証明
4. 幾何的な証明
5. 解析的な証明
6. さらに高度な証明
7. まとめ

この動画は，7個のチャプターによって構成されています．

1. イントロダクション
2. $\sqrt{2}$はどのような数か
3. 代数的な証明
4. 幾何的な証明
5. 解析的な証明
6. さらに高度な証明
7. まとめ

まず，次のチャプターでは，実数$\sqrt{2}$の正体に迫ります．

その後，$\sqrt{2}$が無理数であることの14の証明を紹介します．

チャプター6では高度な数学を使用しますが，

1. イントロダクション
2. $\sqrt{2}$はどのような数か
3. 代数的な証明
4. 幾何的な証明
5. 解析的な証明
6. さらに高度な証明
7. まとめ

どの証明も興味深いものばかりだと思いますので，

ぜひ，最後までご覧ください！

2. $\sqrt{2}$はどのような数か

2. $\sqrt{2}$はどのような数か

2. $\sqrt{2}$はどのような数か

- $\sqrt{2}$の定義
- $\sqrt{2}$の構成
- $\sqrt{2}$の歴史

2. $\sqrt{2}$はどのような数か

- $\sqrt{2}$の定義
- $\sqrt{2}$の構成
- $\sqrt{2}$の歴史

本題に入る前に，このチャプターでは，$\sqrt{2}$について深堀りしていきます．

$\sqrt{2}$の定義

まず，$\sqrt{2}$がどのような数なのかについて，
じっくり考えることから始めたいと思います．

$$x^2 = 2 \quad (x > 0)$$

$\sqrt{2}$は，2乗して2になる正の実数のことです．

$$x^2 = 2 \quad (x > 0)$$

これは$\sqrt{2}$の定義に他ならないのですが，
もう少し詳しく見ていきましょう．

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

そもそも，実数がどのように定義されるのかについて，
簡単に流れを追ってみましょう．

$$\begin{array}{ll}
(1) & 0 \in \mathbb{N} \\
(2) & \forall n \in \mathbb{N},\ s(n) \in \mathbb{N} \\
(3) & \forall n \in \mathbb{N},\ s(n) \neq 0 \\
(4) & \forall m, n \in \mathbb{N},\ [m \neq n \implies s(m) \neq s(n)] \\
(5) & \forall P \subset \mathbb{N},\ [[0 \in \mathbb{N} \land \forall n \in \mathbb{N},\ [n \in P \implies s(n) \in P]] \implies P = \mathbb{N}]
\end{array}$$

まず，ペアノの公理を満たす集合として自然数を定義します．

$$(a,b) \sim (c,d) \iff a+d=b+c$$

$$((a,b),(c,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N})$$

次に，自然数と自然数の直積に，このような二項関係を導入すると，
これは同値関係となることが分かります．
これは，差が等しいペアを同一視するという同値関係です．

$$\mathbb{Z} \cong (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$$

自然数と自然数の直積を
この同値関係で割ることで得られる商集合として，
整数を定義します．

$$(a,b)\sim(c,d) \iff ad=bc$$

$$((a,b),(c,d))\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$$

そして，整数と整数の直積に，このような二項関係を導入すると，
こちらも同値関係となることが分かります．
これは，商が等しいペアを同一視するという同値関係です．

$$\mathbb{Q} \cong (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) / \sim$$

整数と整数の直積を
この同値関係で割ることによって得られる商集合として，
有理数を定義します．
代数学の立場では，整数の商体として有理数を構成したことになります．

$$\mathbb{Q} \rightarrowtail \mathbb{R}$$

こうして定義された有理数を用いて実数を定義することになるのですが，
その構成方法はいくつかあります．
ここでは，コーシー列を考える完備化による方法と，
デデキント切断を用いる方法を紹介します．

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$がコーシー列

$$\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ \text{s.t.}\ \forall m, n \in \mathbb{N},\ m, n \geq N \implies |a_m - a_n| < \varepsilon$$

コーシー列の定義は，任意の正の実数εに対して，ある正の整数Nが存在して，N以上の任意の正の実数mとnに対して，a_mとa_nの差の絶対値がε未満となるような数列のことです．

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \iff \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$：有理コーシー列

有理数のみからなるコーシー列を有理コーシー列といい，
有理コーシー列全体の集合に，このような二項関係を定義します．

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \iff \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$$

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} : \text{有理コーシー列}$$

これは同値関係であり，
差が0に収束する有理コーシー列を同一視するものです．

$$\{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \mid \{a_n\}_{n=1}^{\infty}\text{は有理コーシー列}\}/\sim$$

有理コーシー列全体の集合を
この同値関係で割ることで得られる商集合として，
実数を定義します．
これは，有理数を完備化して実数を構成したことになります．

$$(1) \quad A \cup B = \mathbb{Q}$$

$$(2) \quad A \neq \emptyset \text{ かつ } B \neq \emptyset$$

$$(3) \quad \forall a \in A,\ \forall b \in B,\ a < b$$

もう一つの方法を紹介しましょう．
まず，これらの条件を満たす，
有理数の部分集合の組をデデキント切断といいます．

$$\mathbb{R} \cong \{(A, B) \mid (A, B) \text{ は } \mathbb{Q} \text{ のデデキント切断}\}$$

それぞれのデデキント切断に対して，
その「境界」にあたる数を対応させることによって，
実数を定義します．
すなわち，デデキント切断全体の集合によって実数を構成します．

$\mathbb{R}$ のデデキント切断 (A, B) に対して，
次のいずれか一方が成り立つ．

(1)　A の最大値が存在し，B の最小値は存在しない．

(2)　B の最小値が存在し，A の最大値は存在しない．

このデデキント切断について，デデキントの公理が成り立ちます．
後で分かることですが，これは実数の連続性と同値な命題です．

実数の連続性

このようにして構成された実数には，
有理数との違いを決定付ける重要な性質があります．
それが，実数の連続性です．

区間縮小法

実数の連続性は様々な言い換えが知られています．
その中の一つである，「区間縮小法」に注目してみましょう．

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を次のように定める．

$$a_1 = 1, b_1 = 2,$$
$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n & \left(a_n^2 < 2 < \frac{1}{4}(a_n+b_n)^2\right) \\ \frac{1}{2}(a_n+b_n) & \left(\frac{1}{4}(a_n+b_n)^2 < 2 < b_n^2\right) \end{cases},$$
$$b_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n+b_n) & \left(a_n^2 < 2 < \frac{1}{4}(a_n+b_n)^2\right) \\ b_n & \left(\frac{1}{4}(a_n+b_n)^2 < 2 < b_n^2\right) \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

区間縮小法より，ある正の実数 c が存在して

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$$

このとき，$c^2 = 2$

区間縮小法を用いると，
2乗して2になる正の実数が存在することが分かります．

正の実数 x, y が $x^2 = y^2 = 2$ を満たすとすると

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2 = 0$$

$x + y > 0$ であるから，$x - y = 0$，すなわち $x = y$ である．

また，このような実数がただ一つしか存在しないこと，
すなわち$\sqrt{2}$の一意性は簡単に分かります．

以上より，最初に述べた$\sqrt{2}$の定義である「2乗して2になる正の実数」がただ一つの実数を定めていることが保証されました．

$\sqrt{2}$の構成

ここからは，$\sqrt{2}$を具体的に構成することを考えてみます．

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n + 2}{a_n + 1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

まず，有理コーシー列による$\sqrt{2}$の構成を見ていきましょう．
このような有理数列を考えます．

$$N := \left\lfloor 1 + \log_4 \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$$

この数列がコーシー列であることを確認しましょう．
任意の正の実数εに対して，正の整数Nをこのように定義します．

$$|a_{n+2}-a_{n+1}| = \left|\frac{a_{n+1}+2}{a_{n+1}+1}-\frac{a_n+2}{a_n+1}\right| = \left|\frac{a_{n+1}-a_n}{(a_n+1)(a_{n+1}+1)}\right| \leq \frac{1}{4}|a_{n+1}-a_n|$$

であるから

$$|a_{n+1}-a_n| \leq \frac{1}{4^{n-1}}|a_2-a_1| = \frac{1}{2\cdot 4^{n-1}}$$

よって，任意の $m,n\in\mathbb{N}$ に対して，$m>n\geq N$ ならば

$$\begin{aligned}|a_m-a_n| &\leq \sum_{i=0}^{m-n-1}|a_{n+i+1}-a_{n+i}| \leq \sum_{i=0}^{m-n-1}\frac{1}{2\cdot 4^{n+i-1}}\\ &= \frac{1}{2\cdot 4^{n-1}}\sum_{i=0}^{m-n-1}\frac{1}{4^i} = \frac{1}{2\cdot 4^{n-1}}\cdot\frac{1-\frac{1}{4^{m-n}}}{1-\frac{1}{4}}\\ &< \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4^{n-1}} < \frac{1}{4^{N-1}} \leq \varepsilon\end{aligned}$$

このとき，N以上の任意の正の整数mとnに対して，この不等式が成り立ちます．

$$[\{a_n\}_{n=1}^{\infty}] \mapsto \sqrt{2}$$

よって，この数列は有理コーシー列です．
この数列の同値類が$\sqrt{2}$に他なりません．

$$A := \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0\} \cup \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \text{ かつ } x^2 < 2\}$$

$$B := \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \text{ かつ } x^2 > 2\}$$

次に，デデキント切断による$\sqrt{2}$の構成を見ていきましょう．
このような有理数の部分集合AとBを考えます．

$$A := \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0\} \cup \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \text{ かつ } x^2 < 2\}$$

$$B := \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \text{ かつ } x^2 > 2\}$$

この集合の組がデデキント切断であることを確認してみましょう．
AとBが空でないことは明らかです．

$a \in A, b \in B$ を任意にとる.

(1)　$a \leq 0$ のとき，明らかに $\boxed{a < b}$

(2)　$a \geq 0$ のとき，$a^2 < 2 < b^2$ であるから，$b^2 - a^2 > 0$

すなわち $(b+a)(b-a) > 0$ であるが，

$b + a > 0$ であるから，$b - a > 0$ すなわち $\boxed{a < b}$

また，Aの任意の元とBの任意の元の間には，
この大小関係が成り立っています．

$$A \cap B = \emptyset$$

$$A \cup B = \mathbb{Q}$$

AとBの共通部分は空集合であり，AとBの直和は有理数全体ですから，
AとBの組はデデキント切断です．

$$(A, B) \longmapsto \sqrt{2}$$

このデデキント切断が$\sqrt{2}$に対応します．

$\sqrt{2}$の歴史

ここからは，$\sqrt{2}$の歴史について見ていきます．

$$\sqrt{2} \fallingdotseq 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$$

2乗して2になる数の探索は古代から行われており，
紀元前2000年から紀元前1650年頃のバビロニアの粘土板には，
2の平方根の近似値が60進法で与えられていました．

$$\sqrt{2} \fallingdotseq 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} - \frac{1}{408}$$

紀元前800年から紀元前200年頃のインドでは，
2の平方根の近似値として，このような値が与えられていました．

https://ja.wikipedia.org/wiki/ピタゴラス教団

古代ギリシャでは，「ピタゴラスの定理」などで知られるピタゴラスが，
ピタゴラス教団という宗教結社を創設し，
「万物は数である」という思想を掲げていました．

$$\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \quad (?)$$

ここでいう「数」とは有理数のことであり，
2の平方根も有理数であると考えていました．

https://ja.wikipedia.org/wiki/ヒッパソス

教団に所属していたヒッパソスは，
2の平方根を正確な分数で表そうとしていたとき，
それが不可能である，
すなわち2の平方根が無理数であることを発見しました．

https://ja.wikipedia.org/wiki/ヒッパソス

これを聞いたピタゴラスは，無理数の存在を教団外部には秘密にし，
ヒッパソスを溺死させたという逸話が残っています．

2. $\sqrt{2}$はどのような数か

- $\sqrt{2}$の定義
- $\sqrt{2}$の構成
- $\sqrt{2}$の歴史

$\sqrt{2}$についての知識が深まったところで，本題に入りましょう．

MathAbyss

3. 代数的な証明

3. 代数的な証明

3. 代数的な証明

- 最も基本的な証明
- 素因数分解の一意性を用いた証明
- 無限降下法による証明
- mod3による証明
- 下1桁に注目する証明
- 有理根定理による証明

3. 代数的な証明

- 最も基本的な証明
- 素因数分解の一意性を用いた証明
- 無限降下法による証明
- mod3による証明
- 下1桁に注目する証明
- 有理根定理による証明

ここから，$\sqrt{2}$が無理数であることを色々な手法で証明していきます．
まず，代数的な性質に着目した証明を紹介します．

最も基本的な証明

記念すべき1つ目の証明は，教科書に載っている，
背理法を用いた最も基本的な証明です．

$$\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Longrightarrow \text{矛盾！}$$

今回の目標は$\sqrt{2}$が無理数であることを証明することですが，
無理数は数式で表現することが困難です．
そこで，$\sqrt{2}$が有理数であると仮定すると，
矛盾が発生してしまうことを示していきましょう．

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

$\sqrt{2}$が有理数であると仮定すると，正の整数pとqを用いて，
このように表すことができます．

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

ここで，pとqを正の整数としてよいのは，$\sqrt{2}$が正の実数であるからです．

$$\sqrt{2}q = p$$

さて，両辺にqを掛けて，

$$2q^2 = p^2$$

両辺を2乗すると，このような等式が得られます．
左辺は偶数ですから，右辺も偶数です．
p^2が偶数であるとき，pの偶奇はどうなるでしょうか．

$$p\text{ が奇数} \Longrightarrow p^2\text{ は奇数}$$

$$\therefore p\text{ は偶数}$$

pが奇数であると仮定すると，p^2は奇数となり矛盾します．
つまり，pは偶数です．

$$^{\exists}k \in \mathbb{N} \text{ s.t. } p = 2k$$

pが偶数であることから，ある正の整数kが存在して，$p = 2k$となります．

$$2q^2 = (2k)^2$$

これを先ほどの等式に代入して，

$$q^2 = 2k^2$$

整理するとこのような等式を得ます．
右辺は偶数ですから左辺も偶数であり，
先ほどの議論を踏まえると，qは偶数になります．

$$\gcd(p, q) \geq 2$$

ここまで分かったことをまとめると，pとqは偶数になります．
すなわち，2はpとqの公約数です．

$$\gcd(p, q) = 1$$

最初の設定で，pとqが互いに素，
すなわち右辺の分数が既約分数であると仮定しておくと，

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

これはpとqが互いに素であることに矛盾します．
したがって，$\sqrt{2}$が無理数であることが証明できました．

素因数分解の一意性を用いた証明

2つ目は，先ほどの証明を少し改変したものになります．

$$\cancel{\gcd(p, q) = 1}$$

先ほどの証明では，pとqは互いに素としていましたが，
この証明ではその条件は不要です．

$$2q^2 = p^2$$

この等式を導くところまでは先程と同様なので省略します．

$$m = \operatorname{ord}_2 p, \qquad n = \operatorname{ord}_2 q$$

$$2q^2 = p^2$$

p, qが持つ素因数2の個数をそれぞれm, nとすると，
左辺は素因数2を$2n+1$個持ち，
右辺は素因数2を$2m$個持つことが分かります．
すなわち，左辺は素因数2を奇数個，
右辺は素因数2を偶数個持つことになり矛盾します．

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

したがって，$\sqrt{2}$は無理数です．

無限降下法による証明

3つ目は無限降下法を用いた証明です．無限降下法は背理法の一種で，
正の整数に最小値があることを利用した証明方法です．

$$2q^2 = p^2$$

この等式から出発します．
先ほどの議論では，pとqがともに偶数であることが分かりました．

$$^{\exists}p_1 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } p = 2p_1$$

$$^{\exists}q_1 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } q = 2q_1$$

よって，ある正の整数p_1とq_1が存在して，
このように表すことができます．

$$p_1 < p, \quad q_1 < q$$

$$\frac{p_1}{q_1} = \sqrt{2}$$

このとき，p_1はpより小さく，q_1はqより小さい正の整数であり，
p_1/q_1は$\sqrt{2}$になります．

$$2q_1^2 = p_1^2$$

このp_1とq_1に対して，同様の議論をすることにより，
p_1とq_1がともに偶数であることが分かり，

$$^{\exists}p_2 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } p_1 = 2p_2$$

$$^{\exists}q_2 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } q_1 = 2q_2$$

ある正の整数p_2とq_2が存在して，このように表すことができます．

$$p_2 < p_1, \quad q_2 < q_1$$

$$\frac{p_2}{q_2} = \sqrt{2}$$

このとき，p_2はp_1より小さく，q_2はq_1より小さい正の整数であり，p_2/q_2は$\sqrt{2}$になります．

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} = \cdots$$

同様の操作を繰り返すと，$\sqrt{2}$の分数表記が無数に得られます．

$$p > p_1 > p_2 > \cdots > 1$$

$$q > q_1 > q_2 > \cdots > 1$$

これらの分子や分母の列は，いくらでも小さくなる正の整数の列ですが，
正の整数には最小値1が存在するため，このような列は存在しません．

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

したがって，$\sqrt{2}$は無理数です．

mod 3による証明

4つ目はmod 3を考える証明です．

$$2q^2 = p^2$$

これまでと同様に，この等式から出発します．
pとqは互いに素であると仮定しましょう．

$$p^2 \equiv 0, 1 \pmod 3$$

$$2q^2 \equiv 0, 2 \pmod 3$$

右辺を3で割った余りは0か1であり，
左辺を3で割った余りは0か2であることから，

$$p \equiv q \equiv 0 \pmod 3$$

左辺と右辺はともに3の倍数，
すなわちpとqはともに3の倍数であることが分かり，
これはpとqが互いに素であることに矛盾します．

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

よって，$\sqrt{2}$は無理数です．

下1桁に注目する証明

5つ目は下1桁に注目していきます．
つまり，mod 10を考えるということです．

$$2q^2 = p^2$$

やはりこの等式から出発します．
pとqは互いに素であるとしておきましょう．

$$p^2 \equiv 0, 1, 4, 5, 6, 9 \pmod{10}$$

$$2q^2 \equiv 0, 2, 8 \pmod{10}$$

右辺の下1桁としてあり得るのは$0,1,4,5,6,9$のいずれかであり，
左辺の下1桁としてあり得るのは$0,2,8$のいずれかであることから，

$$p \equiv q \equiv 0 \pmod{10}$$

左辺と右辺はともに下1桁が0，
すなわちpとqはともに10の倍数であることが分かり，
これはpとqが互いに素であることに矛盾します．

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

よって，$\sqrt{2}$は無理数です．

有理根定理による証明

6つ目は有理根定理を用いる証明です．

$$x^2 - 2 = 0$$

$\sqrt{2}$は2次方程式$x^2 - 2 = 0$の解の1つです．

$$\pm 1, \pm 2$$

この2次方程式が有理数解を持つとすると，
有理根定理により，(定数項の約数)/(最高次の係数の約数)と
書けるので，これらのいずれかになります．

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

しかし，これらは方程式の解でないため，$\sqrt{2}$は無理数です．

3. 代数的な証明

- 最も基本的な証明
- 素因数分解の一意性を用いた証明
- 無限降下法による証明
- mod3による証明
- 下1桁に注目する証明
- 有理根定理による証明

代数的な証明のうち，基本的なものはここまで紹介した6つになります．

[illegible]

4. 幾何的な証明

4. 幾何的な証明

4. 幾何的な証明

- 正方形を用いた証明
- 直角二等辺三角形を用いた証明

4. 幾何的な証明

- 正方形を用いた証明
- 直角二等辺三角形を用いた証明

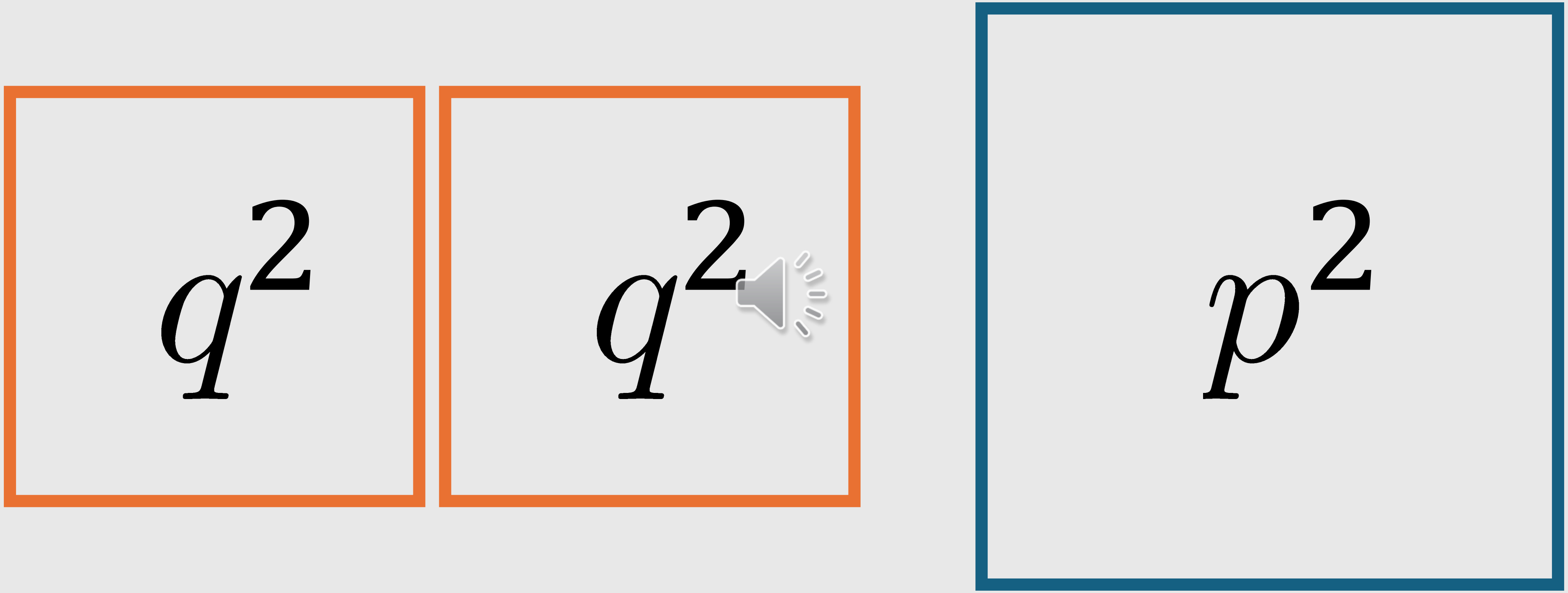
次に，無理数という代数的な性質を，
幾何的に証明する方法について見ていきましょう．

正方形を用いた証明

1つ目は正方形を用いた証明です．

$$2q^2 = p^2$$

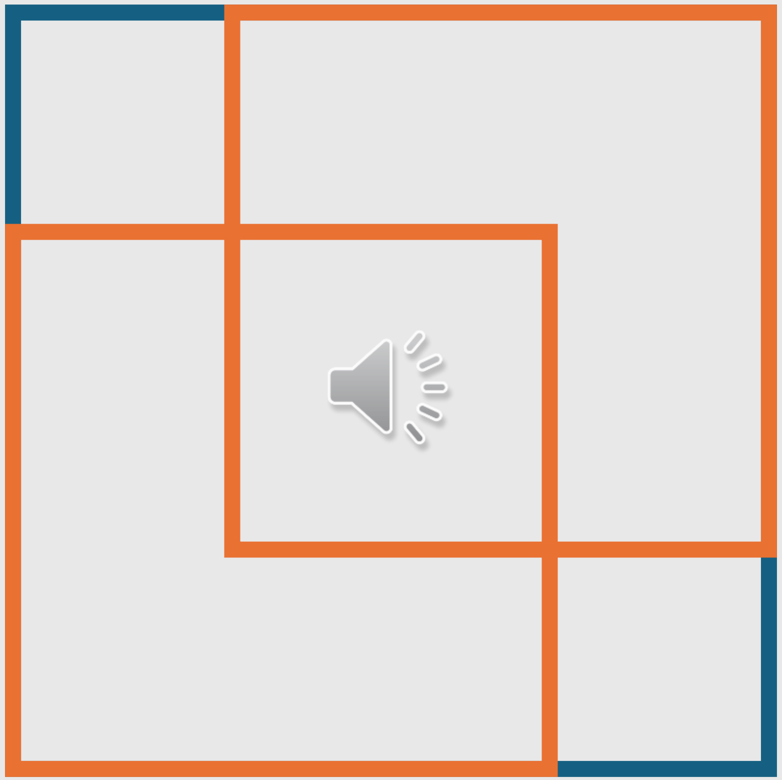
先ほどのチャプターでたどり着いたこの等式からスタートします．



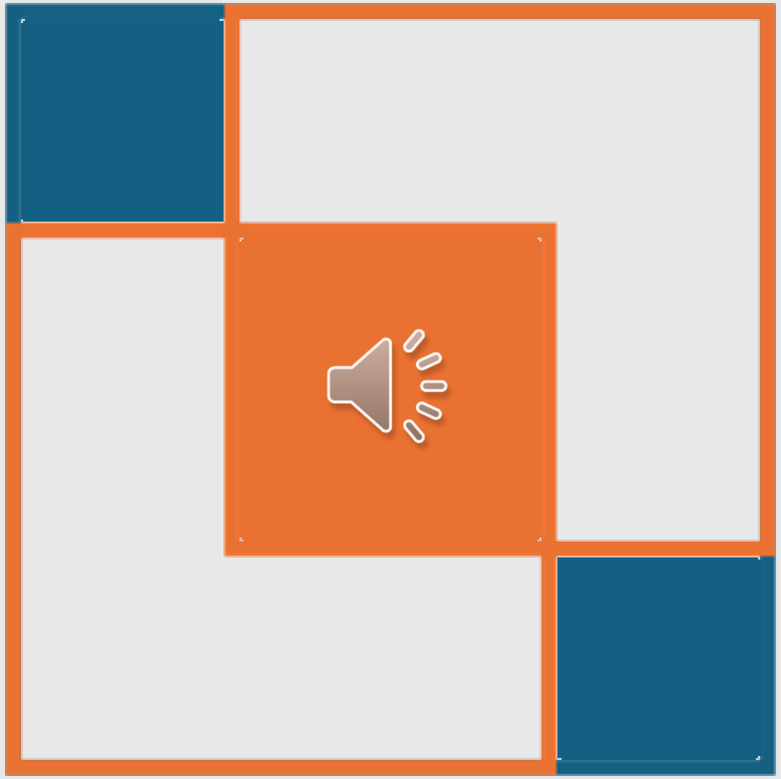
この等式を，1辺の長さがqの正方形2つの面積と，
1辺の長さがpの正方形の面積が等しいとして解釈します．

$$q < p < 2q$$

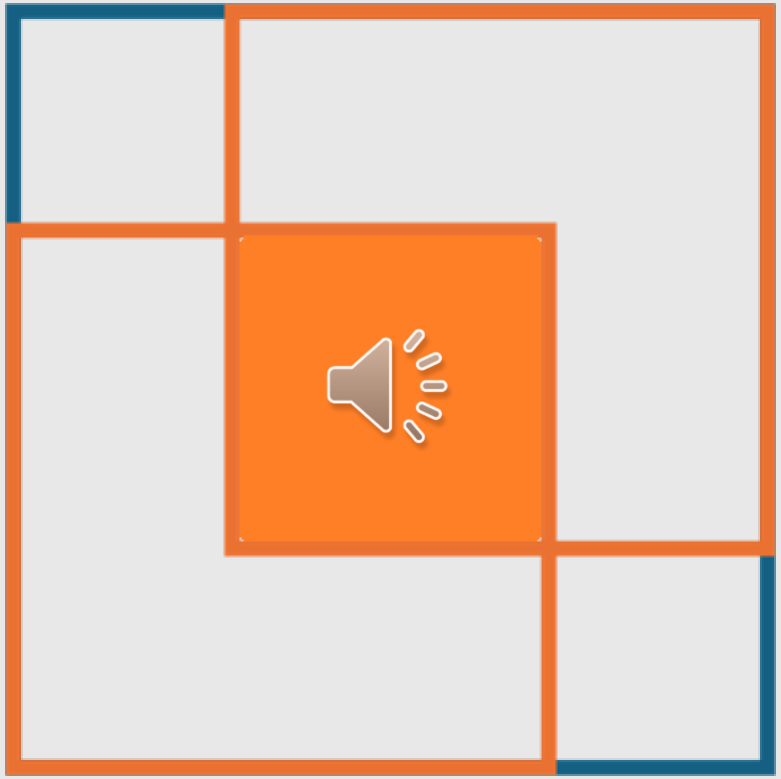
この大小関係に注意して，議論を進めます．



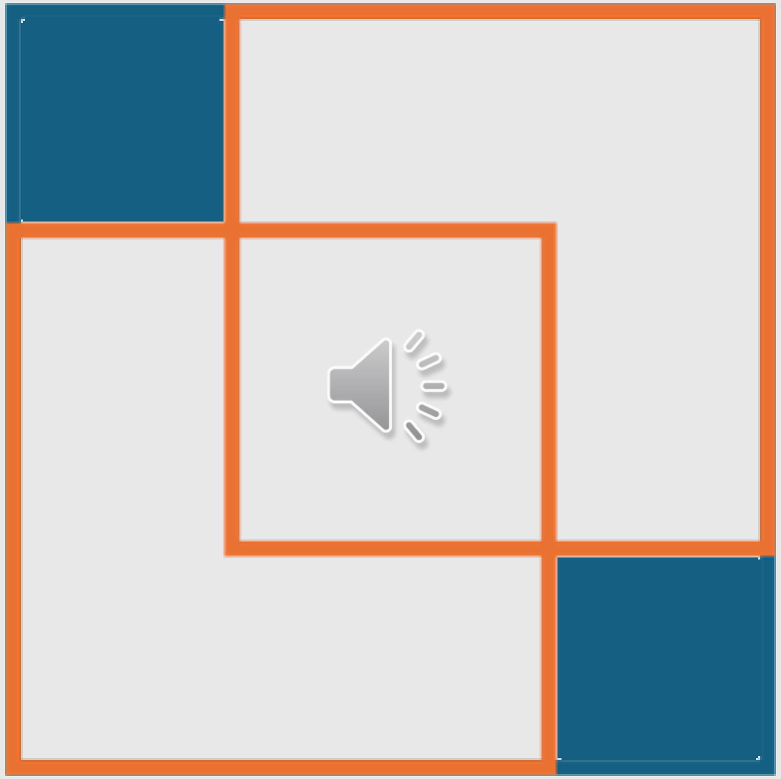
1辺の長さがpの正方形を，
1辺の長さがqの正方形2つでこの図のように覆うと，



小さい正方形2つが重なった部分の面積が，
小さい正方形で覆われていない部分の面積に等しくなる必要があります．



重なった部分は1辺の長さが$2q-p$の正方形であり，



覆われていない部分の2つは合同で，
それぞれ1辺の長さが$p-q$の正方形になっています．

$$(2q-p)^2 = 2(p-q)^2$$

よって，面積について，この等式が成り立つことが分かります．

$$p_1 = 2q - p$$

$$q_1 = p - q$$

ここで，正の整数p_1とq_1をこのように定めると，

$$2q_1^2 = p_1^2$$

p_1とq_1はこの等式を満たし，

$$p_1 < p \qquad q_1 < q$$

それぞれこのような大小関係が成り立ちます．

$$(2q_1 - p_1)^2 = 2(p_1 - q_1)^2$$

このp_1とq_1に対して，同様の操作を繰り返すことによって，

$$2q_2^2 = p_2^2$$

この等式を満たすより小さい正の整数の組を見つけることができます。

$$p > p_1 > p_2 > \cdots > 1$$

$$q > q_1 > q_2 > \cdots > 1$$

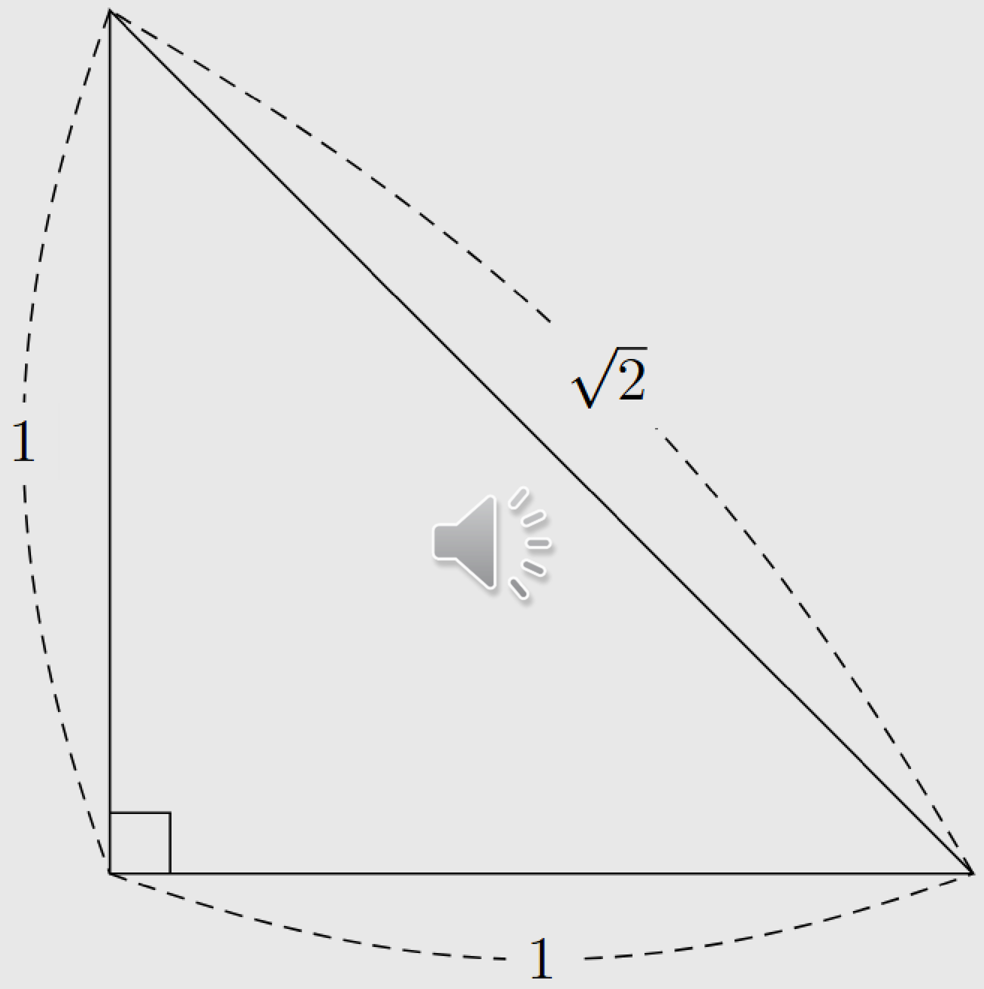
しかし，正の整数には最小値1が存在します．

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

これは矛盾となり，$\sqrt{2}$が無理数であることが証明できました．

直角二等辺三角形を用いた証明

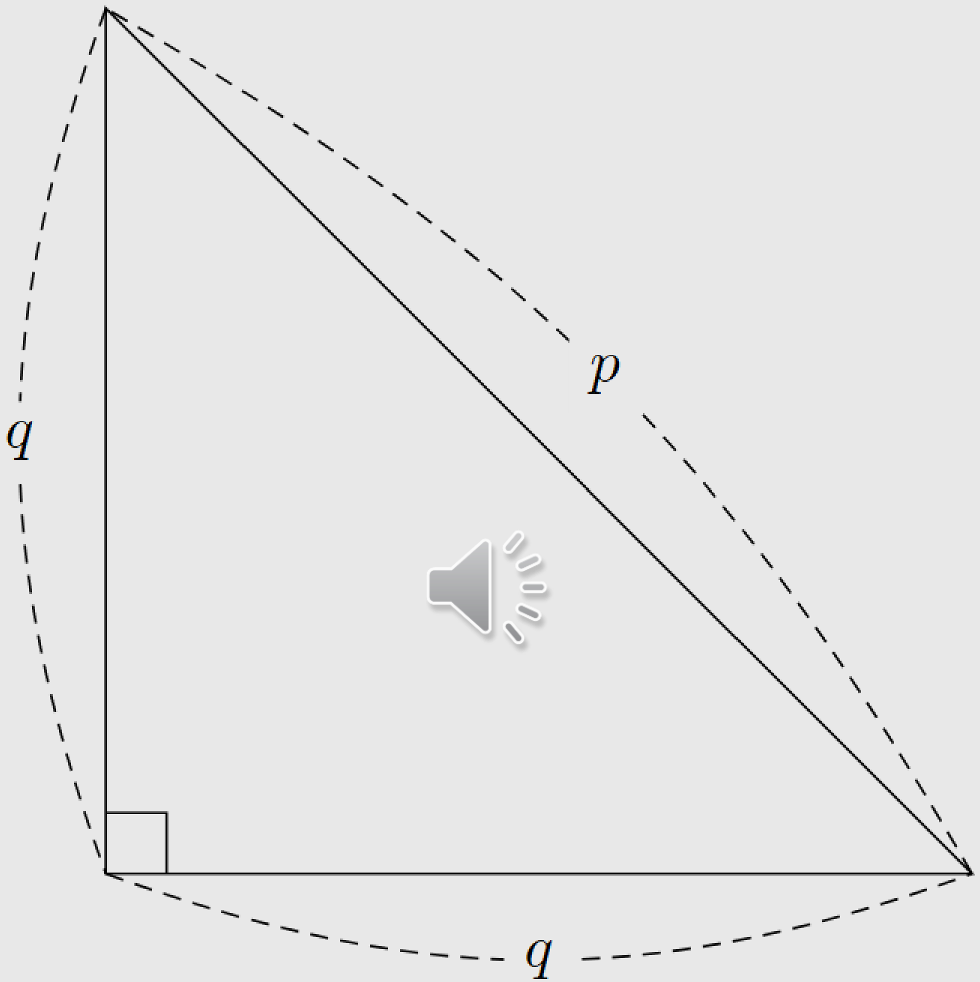
2つ目は直角二等辺三角形を用いた証明です．



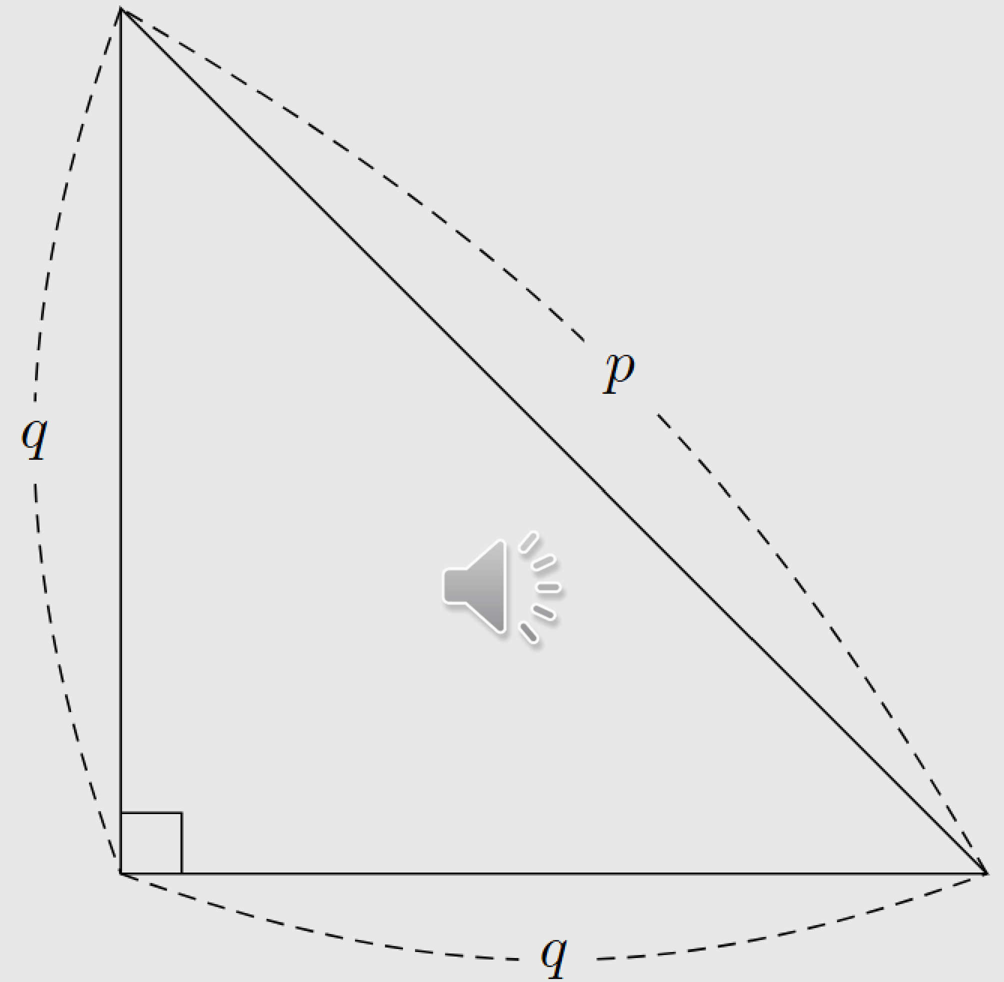
まず，有名な直角二等辺三角形を考えます．

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

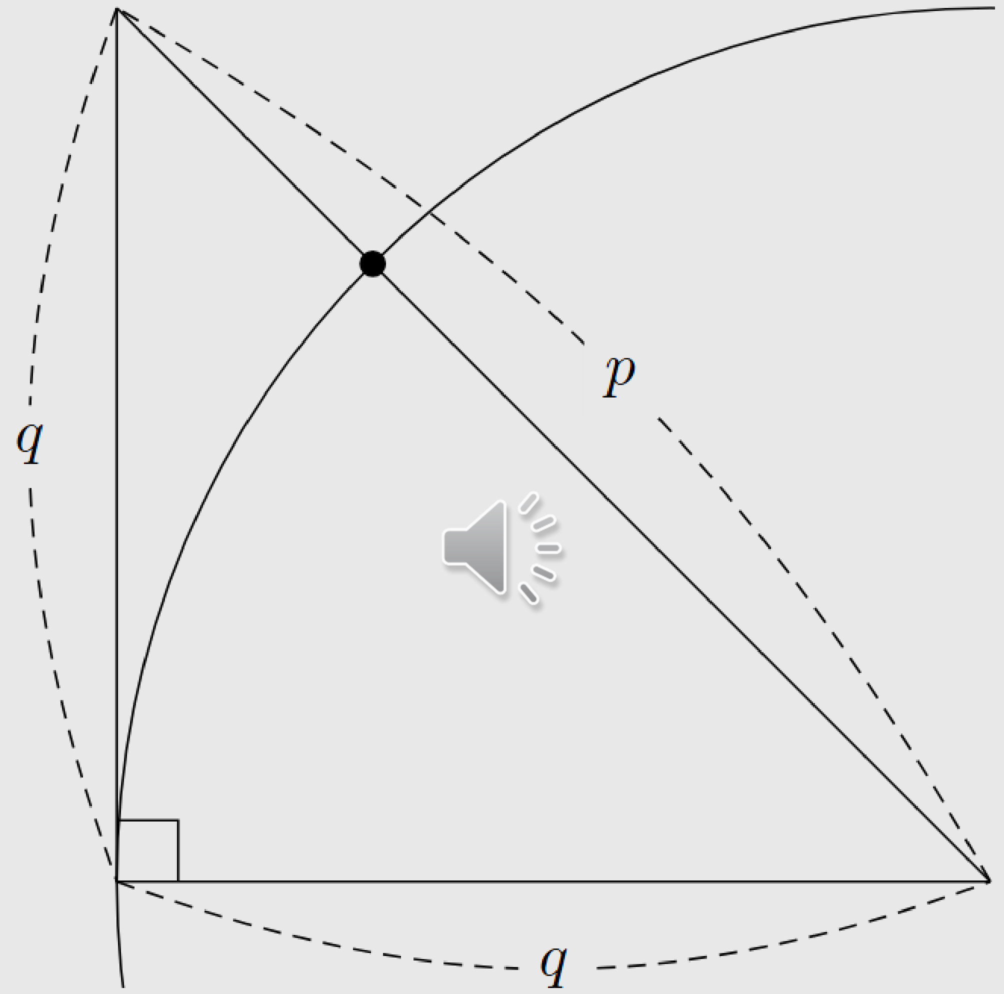
$\sqrt{2}$が有理数であると仮定すると，
このように正の整数の比で表すことができるので，



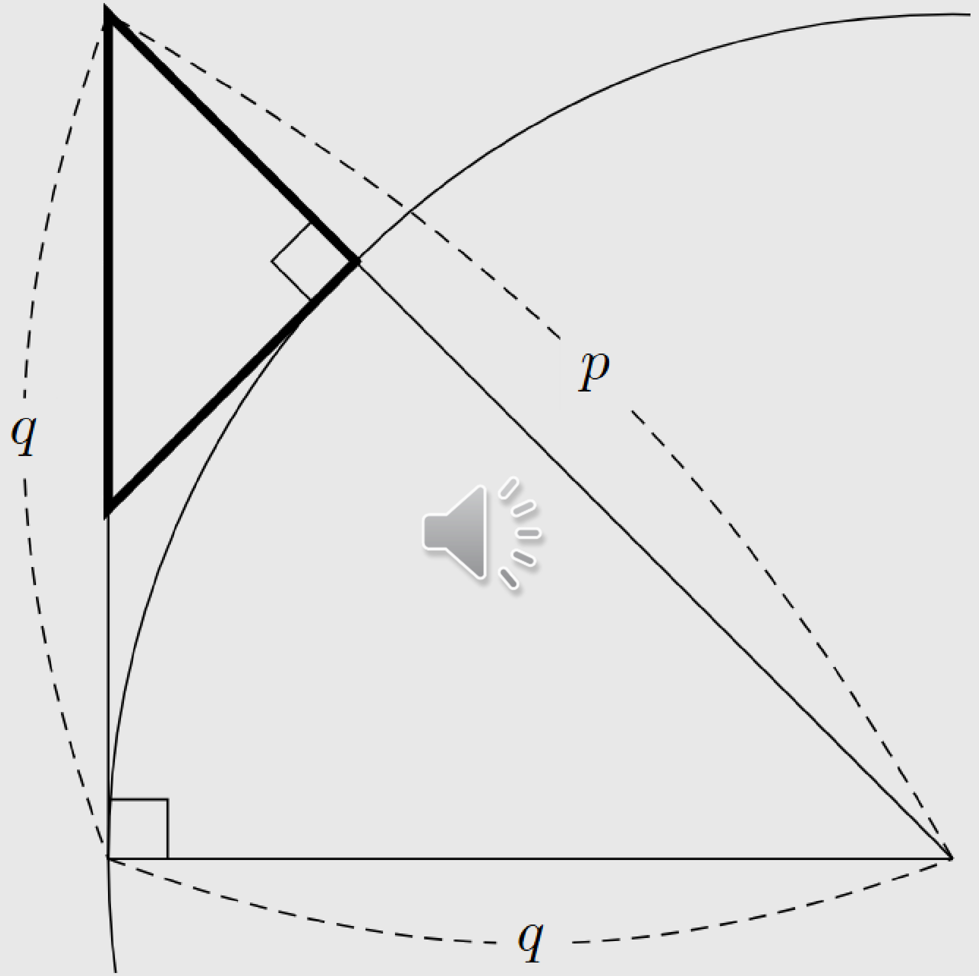
すべての辺の長さが整数である
直角二等辺三角形が存在することになります．



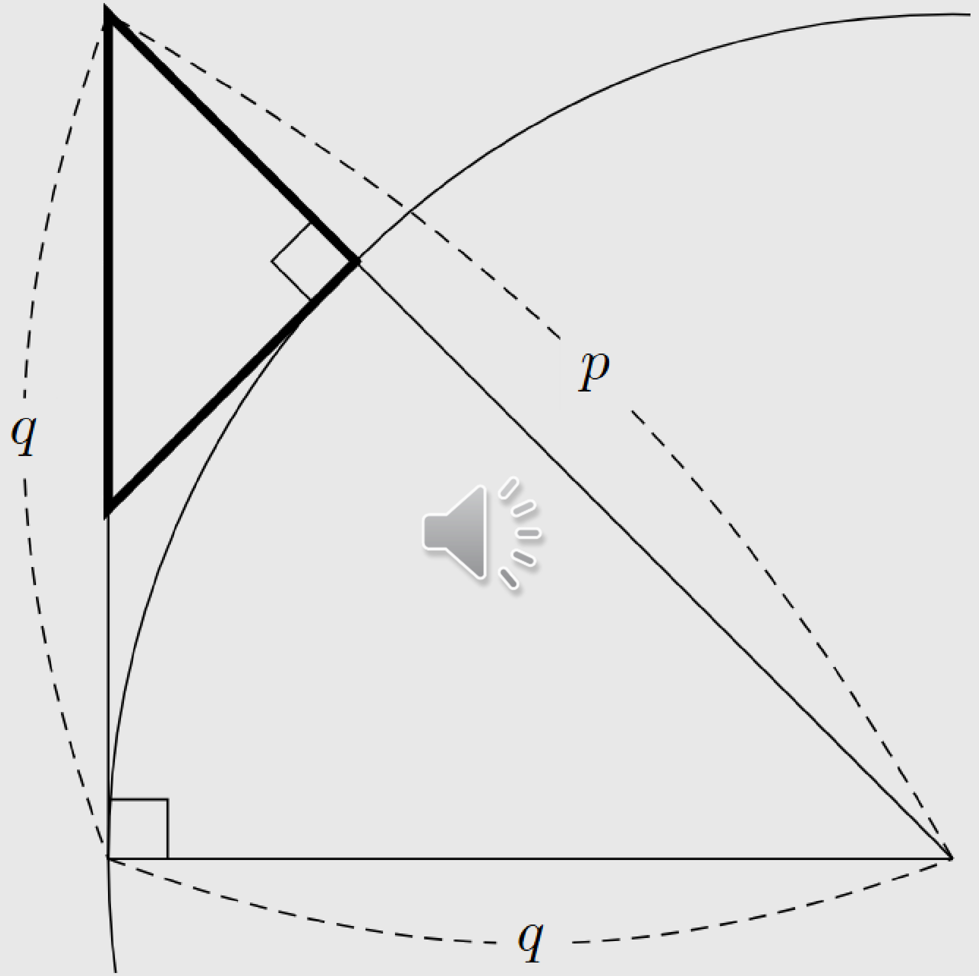
その中で，3つの辺の長さの総和が最小であるような三角形を考えます．
すなわち，pとqは互いに素であるとします．



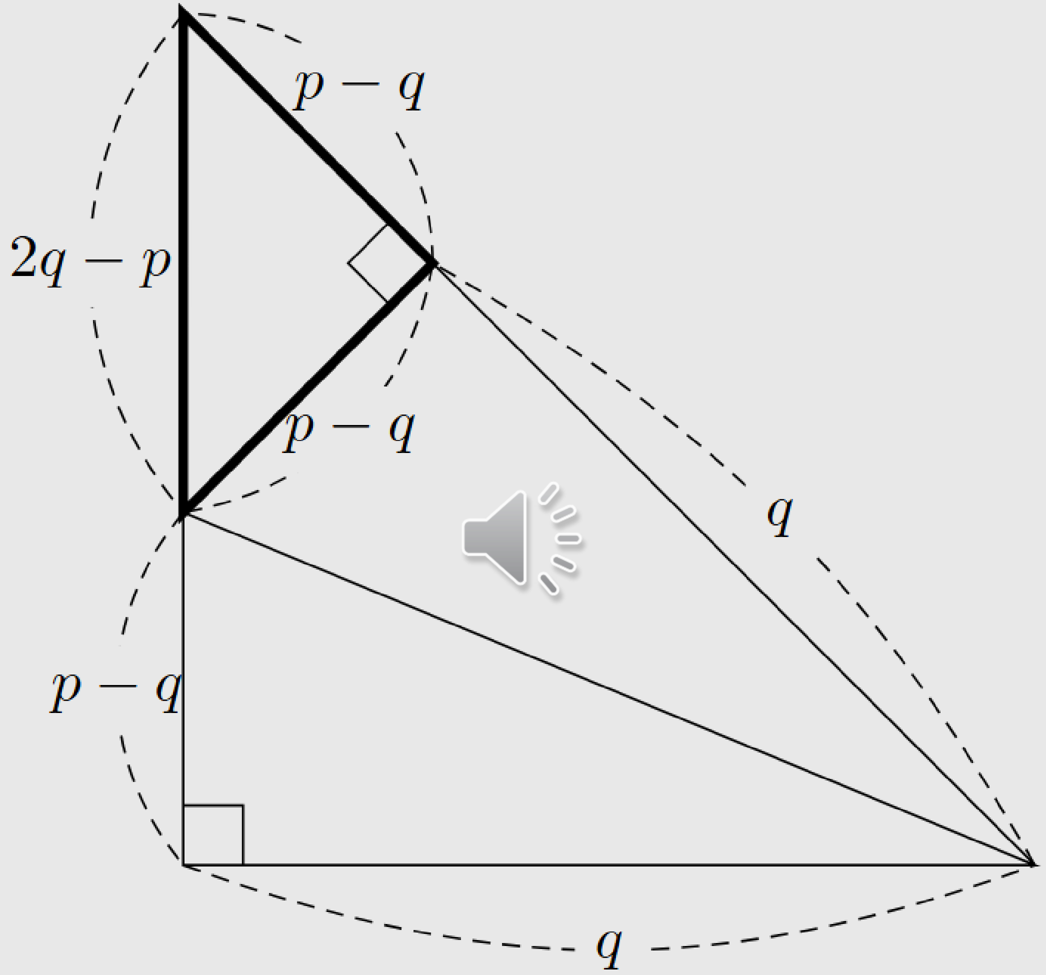
直角でない角を持つ頂点を中心とする半径qの円と斜辺の交点をとり，



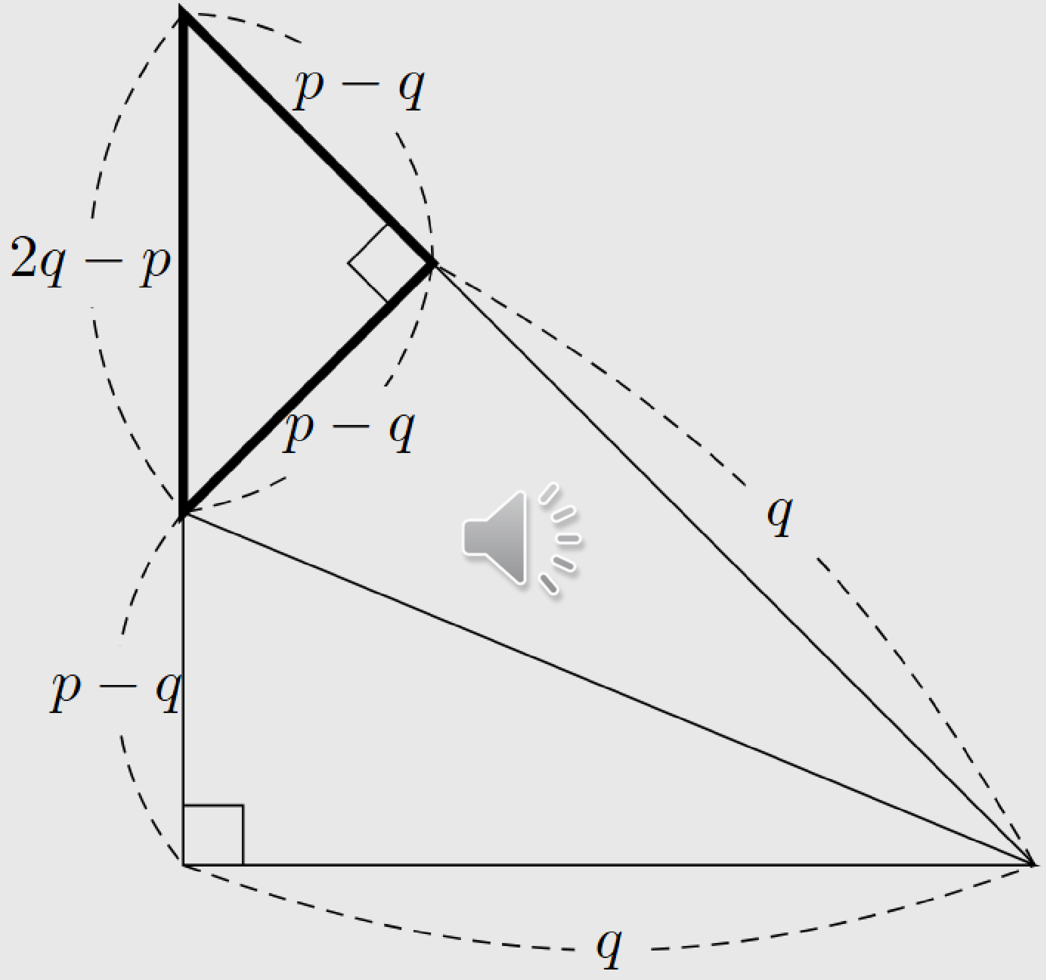
これによってできる三角形について考えると，



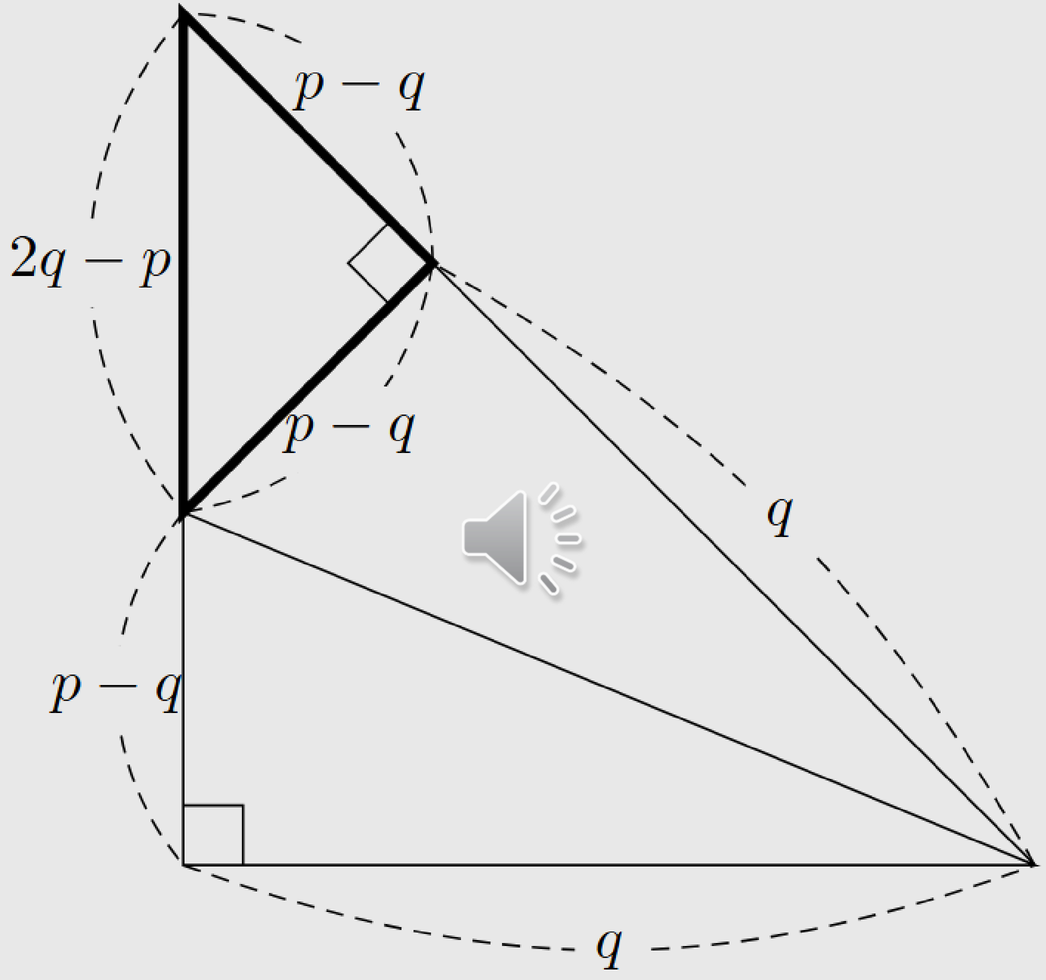
この三角形は直角二等辺三角形であり，



各辺の長さは整数になります．



しかし，この三角形は元の三角形より明らかに小さいため，



元の三角形が満たす「辺の長さの総和の最小性」に矛盾します．

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

したがって，$\sqrt{2}$は無理数です．

4. 幾何的な証明

- 正方形を用いた証明
- 直角二等辺三角形を用いた証明

ここまで，代数的アプローチと幾何的アプローチを紹介してきました。

MathAbyss

5. 解析的な証明

5. 解析的な証明

5. 解析的な証明

- 等比数列の収束性を用いた証明
- 連分数展開による証明

5. 解析的な証明

・等比数列の収束性を用いた証明
・連分数展開による証明

次に，解析的な証明を紹介していきます．

等比数列の収束性を用いた証明

1つ目は等比数列の極限に注目する証明です．

$$(\sqrt{2}-1)^n$$

まず，$(\sqrt{2}-1)^n$を考えます．

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\sqrt{2})^k (-1)^{n-k}$$

二項定理を使うとこのように展開することができるので，

$$(\sqrt{2}-1)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

ある整数a_nとb_nが存在して，このように表すことができます．

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

ここで，$\sqrt{2}$が有理数であると仮定すると，
ある正の整数pとqが存在して，このように書けるので，

$$q(\sqrt{2}-1)^n = a_n q + b_n p$$

両辺にqを掛けることで，この等式を得ます．
右辺は常に整数となることに注意しましょう．

$$q(\sqrt{2}-1)^N < 1$$

一方，nを十分大きくとることによって，
左辺は1よりも小さい値になることが分かります．

$$a_N q + b_N p < 1$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

これは矛盾です．すなわち，$\sqrt{2}$は無理数であることが分かりました．

連分数展開による証明

2つ目は連分数展開を用いた証明です．

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\ddots}}}$$

この無限正則連分数を考えます．
正則連分数とは，すべての分子が1である連分数のことです．

$$1+\cfrac{1}{2},\quad 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}},\quad 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}},\ \cdots$$

この無限正則連分数は，
このような有限正則連分数の極限として定義されます．

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + 2}{a_n + 1} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$$

この数列が満たす漸化式を求めるとこのようになり，

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + 2}{a_n + 1} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$$

この数列は，1つ目のチャプターで登場した
有理コーシー列と同じであることが分かります．

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$$

したがって，この数列は収束し，
その極限は$\sqrt{2}$であることが分かります．

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

よって，$\sqrt{2}$はこのように
無限正則連分数展開可能であることが分かりました．

$$x \in \mathbb{Q} \implies x \text{ は有限正則連分数展開可能}$$

実は，ユークリッドの互除法を考えることにより，
任意の有理数は有限正則連分数展開可能であることが分かるので，

$$x \in \mathbb{R} \text{ が無限正則連分数展開可能} \implies x \notin \mathbb{Q}$$

その対偶を考えることで，
無限正則連分数展開可能な実数は無理数であることが分かります．

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

よって，$\sqrt{2}$は無理数です．

5. 解析的な証明

- 等比数列の収束性を用いた証明
- 連分数展開による証明

ここまでで，数学の3大分野である代数・幾何・解析
それぞれによる証明を見てきました．

MathAbyss

6. さらに高度な証明

6. さらに高度な証明

6. さらに高度な証明

- 線形代数による証明
- ガロア理論による証明
- p進付値を用いた証明
- ルジャンドル多項式を用いた証明

6. さらに高度な証明

- 線形代数による証明
- ガロア理論による証明
- p進付値を用いた証明
- ルジャンドル多項式を用いた証明

最後に，高度な数学を用いた証明を紹介します．

6. さらに高度な証明

- 線形代数による証明
- ガロア理論による証明
- p進付値を用いた証明
- ルジャンドル多項式を用いた証明

大学数学をフルに活用して，
$\sqrt{2}$が無理数であることを証明してみましょう．

線形代数による証明

1つ目は，多くの理工系の大学生が学ぶ，線形代数を用いた証明です．

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

まず，このような2次正方行列Aを考えます．

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m+2n \\ m-n \end{pmatrix}$$

行列Aが表す線形変換は，整数のペアを整数のペアに移します．

$$S = \{m + n\sqrt{2} \in \mathbb{R} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

ここで，このような集合Sを考えましょう．

$$m + n\sqrt{2} \mapsto (-m + 2n) + (m - n)\sqrt{2}$$

Sの元に対して，先ほどの線形変換を適用すると，再びSの元が得られ，

$$
\begin{aligned}
&(-m+2n)+(m-n)\sqrt{2} \\
=&(\sqrt{2}-1)m+(2-\sqrt{2})n \\
=&(\sqrt{2}-1)(m+n\sqrt{2})
\end{aligned}
$$

これは，Sの元に$\sqrt{2}-1$を掛けることに他ならないことが分かります．

$$1 \mapsto \sqrt{2}-1 \mapsto 3-2\sqrt{2}$$
$$\mapsto 5\sqrt{2}-7 \mapsto \cdots$$

$1 \in S$に対して，この線形変換を繰り返し適用することで，

$$1 \mapsto \sqrt{2}-1 \mapsto 3-2\sqrt{2}$$
$$\mapsto 5\sqrt{2}-7 \mapsto \cdots$$

いくらでも小さいSの元が得られることが分かります．

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

一方，$\sqrt{2}$が有理数であると仮定すると，
このような既約分数で表されるので，

$$m + n\sqrt{2} = \frac{mq + np}{q} > \frac{1}{q}$$

Sの元はこのように表すことができ，最小値が存在することが分かります．

$$1 > \sqrt{2} - 1 > 3 - 2\sqrt{2}$$
$$> 5\sqrt{2} - 7 > \cdots > \frac{1}{q}$$

これは矛盾です.

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

したがって，$\sqrt{2}$は無理数であることが分かりました．

ガロア理論による証明

2つ目は，ガロア理論を用いた，代数学による証明です．

$$f(x) = x^2 - 2$$

まず，この有理数係数多項式を考えます．
この多項式は，$\sqrt{2}$を根に持つことがわかります．

$$K = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$$

次に，この多項式の最小分解体Kを考えます．
具体的には，有理数体に$\sqrt{2}$を添加した体になります．

$$G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$$

ここで，このようなガロア群Gを考えます．
Gは，Kの自己同型写像であって，
任意の有理数を固定するもの全体からなります．

$$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - 2 = 0$$

$\sqrt{2}$は多項式fの根であることから，この等式を満たします．

$$\sigma((\sqrt{2})^2 - 2) = \sigma(0)$$

ここで，両辺に$\sigma \in G$を作用させると，

$$(\sigma(\sqrt{2}))^2 - 2 = 0$$

σは有理数を固定する準同型であるため，このように計算できます．

$$f(\sigma(\sqrt{2})) = 0$$

よって，$\sigma(\sqrt{2})$は多項式fの根になります．

$$\sigma : K \to K ; a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}$$

ここで，σをこのようにとってみます．

$$\sigma(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$$

このとき，$\sqrt{2}$は$-\sqrt{2}$に移ることが分かります．

$$\mathbb{Q} = K^G = \{x \in K \mid \forall \sigma \in G,\ \sigma(x) = x\}$$

ガロア理論の基本定理より，有理数体はこのように表すことができますが，

$$\sqrt{2} \notin K^G$$

先ほどの$\sigma \in G$が満たす性質から，
$\sqrt{2}$は左辺の集合に属していないことが分かります．

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

したがって，$\sqrt{2}$は無理数です．

p進付値を用いた証明

3つ目は，p進付値を用いた，整数論を用いた証明です．

$$p : \text{素数}$$

まず，p進付値について説明しておきます．pを素数とします．

$$x = p^k \cdot \frac{a}{b}$$

0でない任意の有理数xに対して，
整数k，pと互いに素な正の整数a，
pと互いに素な0でない整数bが存在して，
この等式が成り立つことが知られています．

$$v_p(x) := k$$

このとき，kをxのp進付値といいます．

$$v_p(x^n) = nv_p(x)$$

p進付値について，このような性質が成り立ちます．

$$x = p^k \cdot \frac{a}{b}$$

$$v_p(x) := k$$

以上を踏まえて，$\sqrt{2}$が無理数であることを証明していきましょう．

$$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$$

$$\Downarrow$$

$$(\sqrt{2})^2 = 2$$

$\sqrt{2}$が有理数であると仮定します．$\sqrt{2}$はこの等式を満たします．

$$v_2\left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right) = v_p(2)$$

両辺の2進付値を考えると，

$$2v_2(\sqrt{2}) = 1$$

このように計算できるので，

$$v_2(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}$$

$\sqrt{2}$の2進付値が整数になりません．これは矛盾です．

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

したがって，$\sqrt{2}$は無理数です．

ルジャンドル多項式を用いた証明

4つ目は，ルジャンドル多項式を用いた証明です．

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)f'(x)\right)+\lambda(\lambda+1)f(x)=0$$
$$(\lambda \in \mathbb{C})$$

ルジャンドル多項式は，
ルジャンドルの微分方程式を満たす関数として定義されます．

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n)$$

このとき，ルジャンドル多項式は
ロドリゲスの公式によって表すことができます．

$$
\begin{aligned}
P_n(2x-1) &= \frac{1}{2^n n!}\frac{1}{2^n}\frac{d^n}{dx^n}(((2x-1)^2-1)^n) \\
&= \frac{1}{4^n n!}\frac{d^n}{dx^n}((4x^2-4x)^n) \\
&= \frac{(-1)^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^n(1-x)^n)
\end{aligned}
$$

ここで，xを$2x-1$に置き換えることによって，
このような表示を得ます．

$$\int_0^1 \frac{P_n(2x-1)}{\sqrt{1+x}}\,dx$$

まず，このような積分について考えます．

$$\int_0^1 \frac{P_n(2x-1)}{\sqrt{1+x}}\,dx = \frac{(-1)^n}{n!}\left(\left[\frac{1}{\sqrt{1+x}}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^n(1-x)^n)\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^n(1-x)^n)\,dx\right)$$

部分積分により計算を進めると

$$\int_0^1 \frac{P_n(2x-1)}{\sqrt{1+x}}\,dx = \frac{(-1)^n}{n!}\left(\left[\frac{1}{\sqrt{1+x}}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^n(1-x)^n)\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^n(1-x)^n)\,dx\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{2n!}\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^n(1-x)^n)\,dx$$

このように整理することができます．同様の計算を続けてみましょう．

$$\int_0^1 \frac{P_n(2x-1)}{\sqrt{1+x}}\,dx = \frac{1}{n!}\int_0^1 x^n(1-x)^n \frac{d^n}{dx^n}(\sqrt{1+x})\,dx$$

部分積分を繰り返すことによって，このようになるのですが，

$$\frac{d^n}{dx^n}(\sqrt{1+x}) = \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n}\frac{1}{(1+x)^{n+\frac{1}{2}}}$$

$(1+x)^{-\frac{1}{2}}$のn回微分を計算することで,

$$\int_0^1 \frac{P_n(2x-1)}{\sqrt{1+x}}\,dx = \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}\int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n}{(1+x)^{n+\frac{1}{2}}}\,dx$$

最終的にこの等式を導くことができました。

$$\int_0^1 \frac{P_n(2x-1)}{\sqrt{1+x}}\,dx$$

一方，この積分を別の方法で計算することを考えてみましょう．

$$\int_0^1 \frac{x^k}{\sqrt{1+x}}\,dx$$

ルジャンドル多項式は整数係数多項式であることが分かるので，
この積分について考えるところから始めましょう．

$$t = \sqrt{1+x}$$

$$\int_0^1 \frac{x^k}{\sqrt{1+x}}\,dx = 2\int_1^{\sqrt{2}} (t^2-1)^k\,dt$$

置換積分を計算することにより，このように変形することができます．

$$\int_0^1 \frac{x^k}{\sqrt{1+x}}\,dx = a_k + b_k\sqrt{2}$$

これは整数係数多項式の定積分なので，
ある有理数a_kとb_kが存在して，このように表すことができます．

$$\int_0^1 \frac{P_n(2x-1)}{\sqrt{1+x}}\,dx = a + b\sqrt{2}$$

したがって，元の積分についても，
ある有理数aとbが存在して，このように表すことができます．

$$\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}\int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n}{(1+x)^{n+\frac{1}{2}}}\,dx = a+b\sqrt{2}$$

まとめると，このようになります．

$$C\int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n}{(1+x)^{n+\frac{1}{2}}}\,dx = A + B\sqrt{2}$$

両辺の分母を払うことにより，
ある整数A, B, Cが存在して，この等式が成り立つことが分かりました．

$$C\int_0^1 \boxed{\frac{x^n(1-x)^n}{(1+x)^{n+\frac{1}{2}}}}\,dx = A + B\sqrt{2}$$

次に，左辺の被積分関数に注目して，
この積分を上から評価してみましょう．

$$\frac{x(1-x)}{1+x}$$

まず，この関数の最大値を求めてみましょう．

$$\frac{x(1-x)}{1+x} \leq 3-2\sqrt{2} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

微分して増減表を書くことによって，
$x=\sqrt{2}-1$のとき，最大値$3-2\sqrt{2}$をとることが分かります．

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n}{(1+x)^{n+\frac{1}{2}}}\,dx \leq (3-2\sqrt{2})^n \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx$$

よって，先ほどの積分は，このように評価できます．

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n}{(1+x)^{n+\frac{1}{2}}}\,dx = 0$$

はさみうちの原理より，この積分は0に収束することが分かります．

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

ここで，$\sqrt{2}$が有理数であると仮定すると，
このように表すことができるので，

$$qC\int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n}{(1+x)^{n+\frac{1}{2}}}\,dx = qA + pB$$

先ほどの積分について，この等式が成り立つことが分かります．

正の整数

$$qC\int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n}{(1+x)^{n+\frac{1}{2}}}\,dx = \boxed{qA+pB}$$

ここで，左辺は正ですから，右辺は正の整数であることが分かります．

正の整数

$$\underbrace{qC\int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n}{(1+x)^{n+\frac{1}{2}}}\,dx}_{0\text{に収束}} = \boxed{qA + pB}$$

ところが，nを十分大きくすると，左辺は1より小さくなります．

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

これは矛盾なので，$\sqrt{2}$は無理数です．

6. さらに高度な証明

- 線形代数による証明
- ガロア理論による証明
- p進付値を用いた証明
- ルジャンドル多項式を用いた証明

このように，$\sqrt{2}$が無理数であることを，
高級な数学を用いることで証明することもできるのです．

7. まとめ

7. まとめ

いかがでしたか？

この動画では，$\sqrt{2}$が無理数であることの様々な証明をご紹介しました．

この動画で紹介しきれなかった証明や，
詳細を省略してしまった内容もありますが，
楽しんでいただけましたでしょうか？

MathAbyssでは，数学に関する記事を公開しているWebサイト
「MathAbyss」を運営しております．

今後も様々な動画を制作していきますので，
この動画に対する高評価，YouTubeのチャンネル登録を
よろしくお願いします！

各種SNS等のフォローもしていただけると励みになります！

最後までご視聴いただき，ありがとうございました！！！

ご視聴ありがとうございました！
チャンネル登録よろしくお願いします！