

不定積分 定積分

高校数学では，まず不定積分を定義し，次に定積分を考えます．

定積分 不定積分

微分積分学では，最初に定積分を定義し，不定積分を考えます．

微分積分学の基本定理

そして、その後に微分積分学の基本定理を証明します。

微分積分学の基本定理

この動画では、微分積分学の基本定理に焦点を当て、
その重要性や一般化について考えていきます。



MathAbyss

MathAbyss

「積分」が「微分」の 逆であるとは どういうことか

～微分積分学の基本定理～

1. イントロダクション
2. 微分と積分の歴史
3. 微分積分学の基本定理
4. 微分積分学の基本定理の一般化
5. まとめ

この動画は5つのチャプターによって構成されています。

1. イントロダクション
2. 微分と積分の歴史
3. 微分積分学の基本定理
4. 微分積分学の基本定理の一般化
5. まとめ

まず，次のチャプターでは，微分と積分の発展の流れを解説します．

1. イントロダクション
2. 微分と積分の歴史
3. 微分積分学の基本定理
4. 微分積分学の基本定理の一般化
5. まとめ

その後，微分積分学の基本定理の証明を与え，

1. イントロダクション
2. 微分と積分の歴史
3. 微分積分学の基本定理
4. 微分積分学の基本定理の一般化
5. まとめ

様々な方向へ一般化していきます。

1. イントロダクション
2. 微分と積分の歴史
3. 微分積分学の基本定理
4. 微分積分学の基本定理の一般化
5. まとめ

微分と積分の世界を今一度見つめ直して行きましょう！

2. 微分と積分の歴史

「積分」が「微分」の逆であるとはどういうことか

1. 微分法

2. 微分と積分の歴史

3. 微分と積分の統一
4. 高校数学における積分

2. 微分と積分の歴史

1.微分法

2.積分法

3.微分と積分の統一

4.高校数学における積分

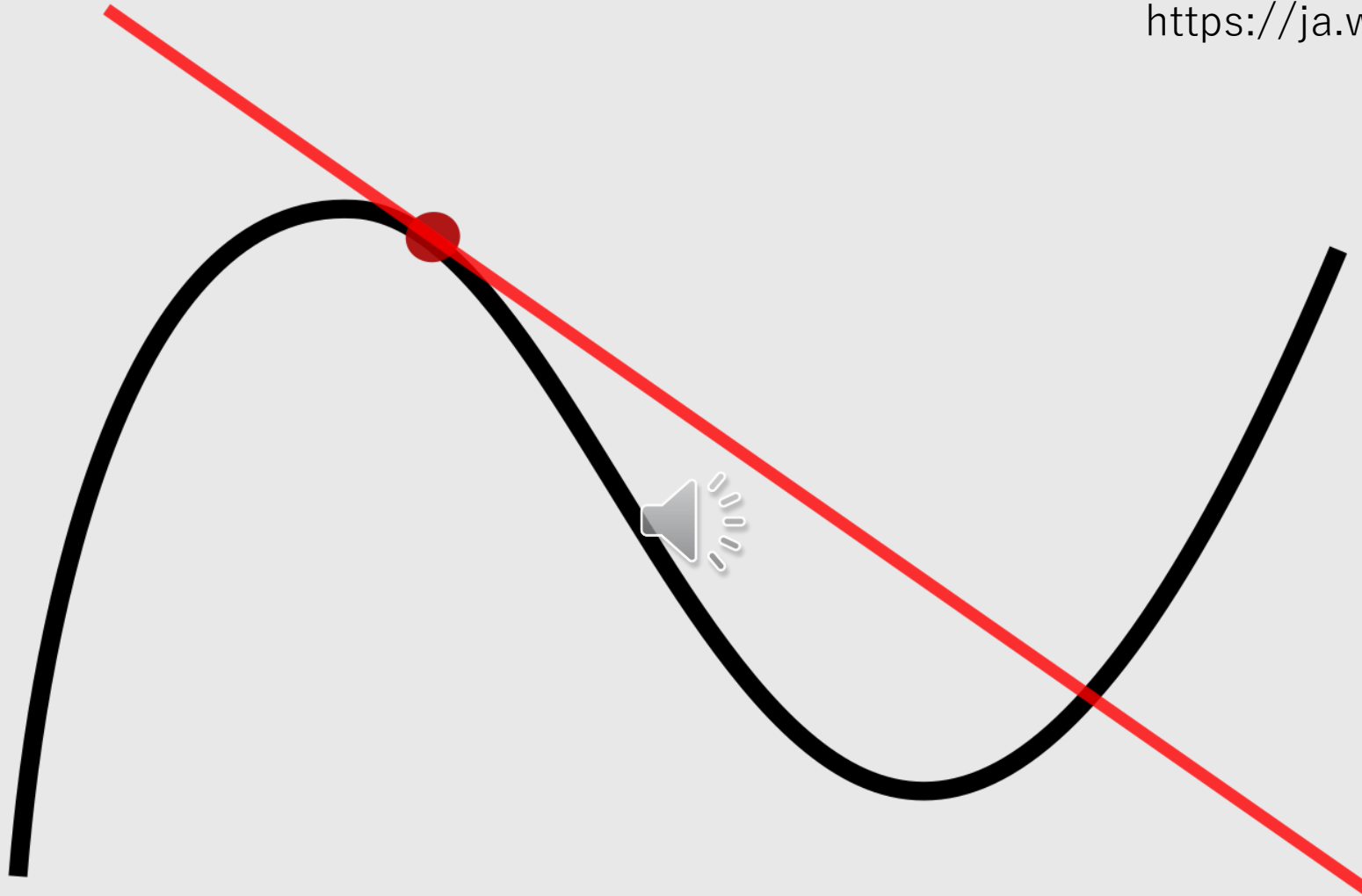
本題に入る前に，微分と積分がどのように誕生したのか，
その歴史について解説していきます。

微分法



まず，微分の歴史について解説します．

<https://ja.wikipedia.org/wiki/接線>



微分は、「接線を求める」ために発展した数学の1分野です。

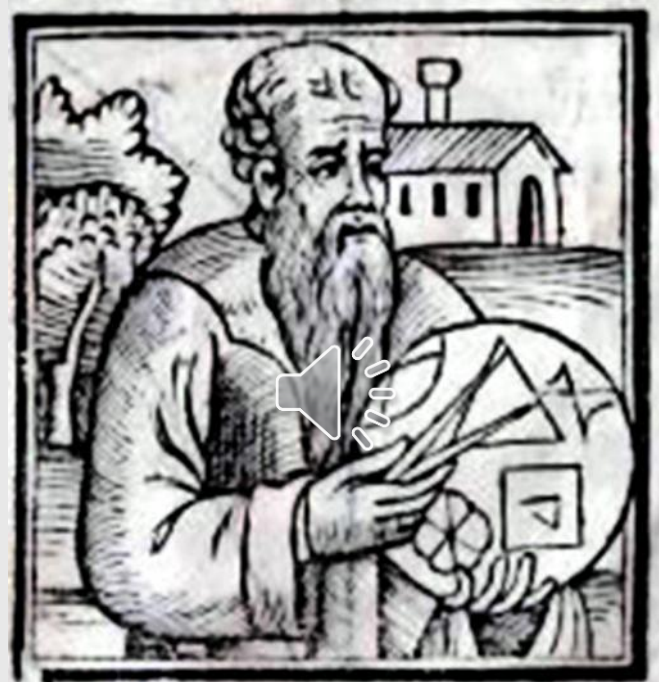
<https://ja.wikipedia.org/wiki/ユークリッド原論>



紀元前3世紀頃，
ユークリッドの『原論』第3巻で，円の接線について論じられており，

<https://ja.wikipedia.org/wiki/ペルガのアポロニウス>

アポロニウス



紀元前2世紀頃，アポロニウスの『円錐曲線論』において，
接線の定義が述べられました．

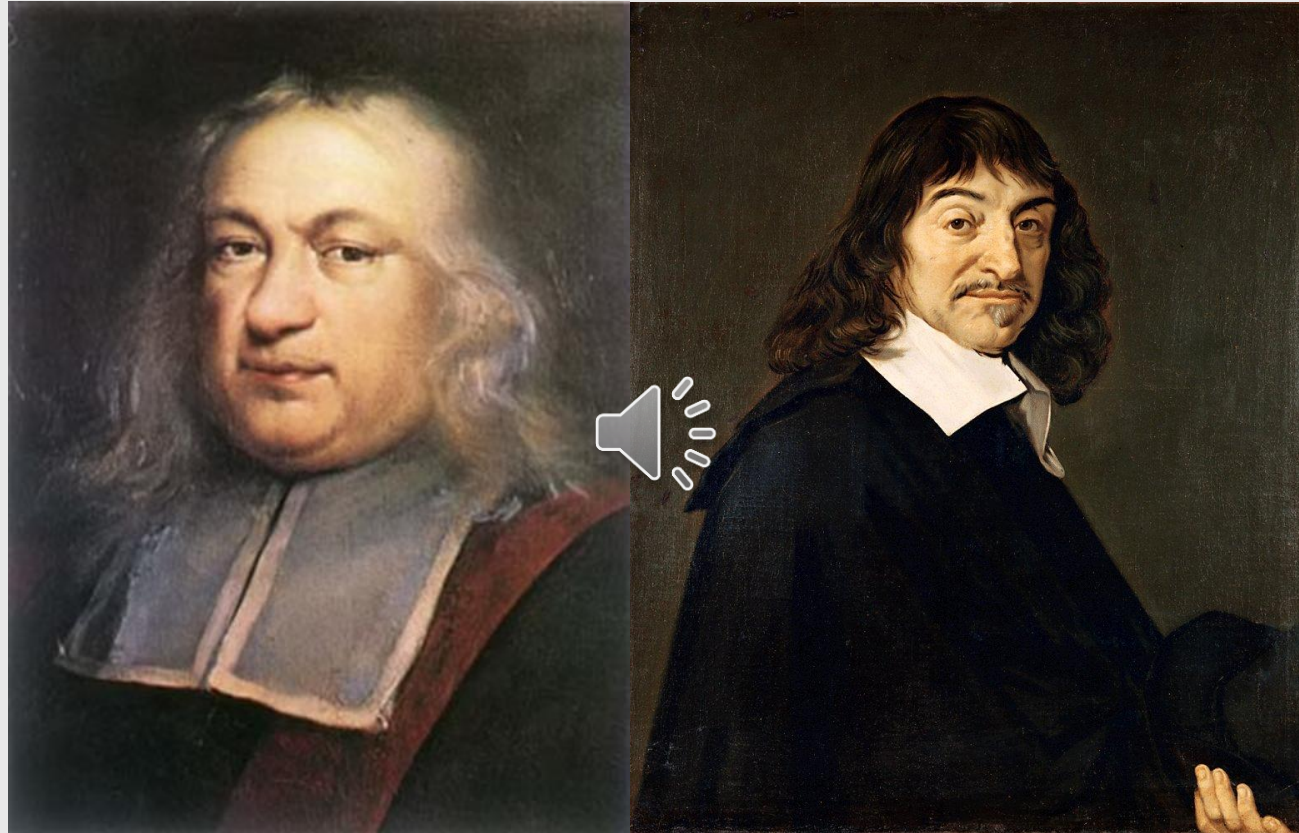
<https://ja.wikipedia.org/wiki/アルキメデス>

アルキメデス



同じ頃、アルキメデスは、
今ではアルキメデスの螺旋と呼ばれている曲線の接線を求めていました。

<https://ja.wikipedia.org/wiki/ピエール・ド・フェルマー> <https://ja.wikipedia.org/wiki/ルネ・デカルト>
フェルマー デカルト



それからしばらくして、1600年頃には、フェルマーやデカルトによって、
接線を解析的に求める手法が確立されていきました。

<https://ja.wikipedia.org/wiki/ロベルヴァル>

ロベルヴァル

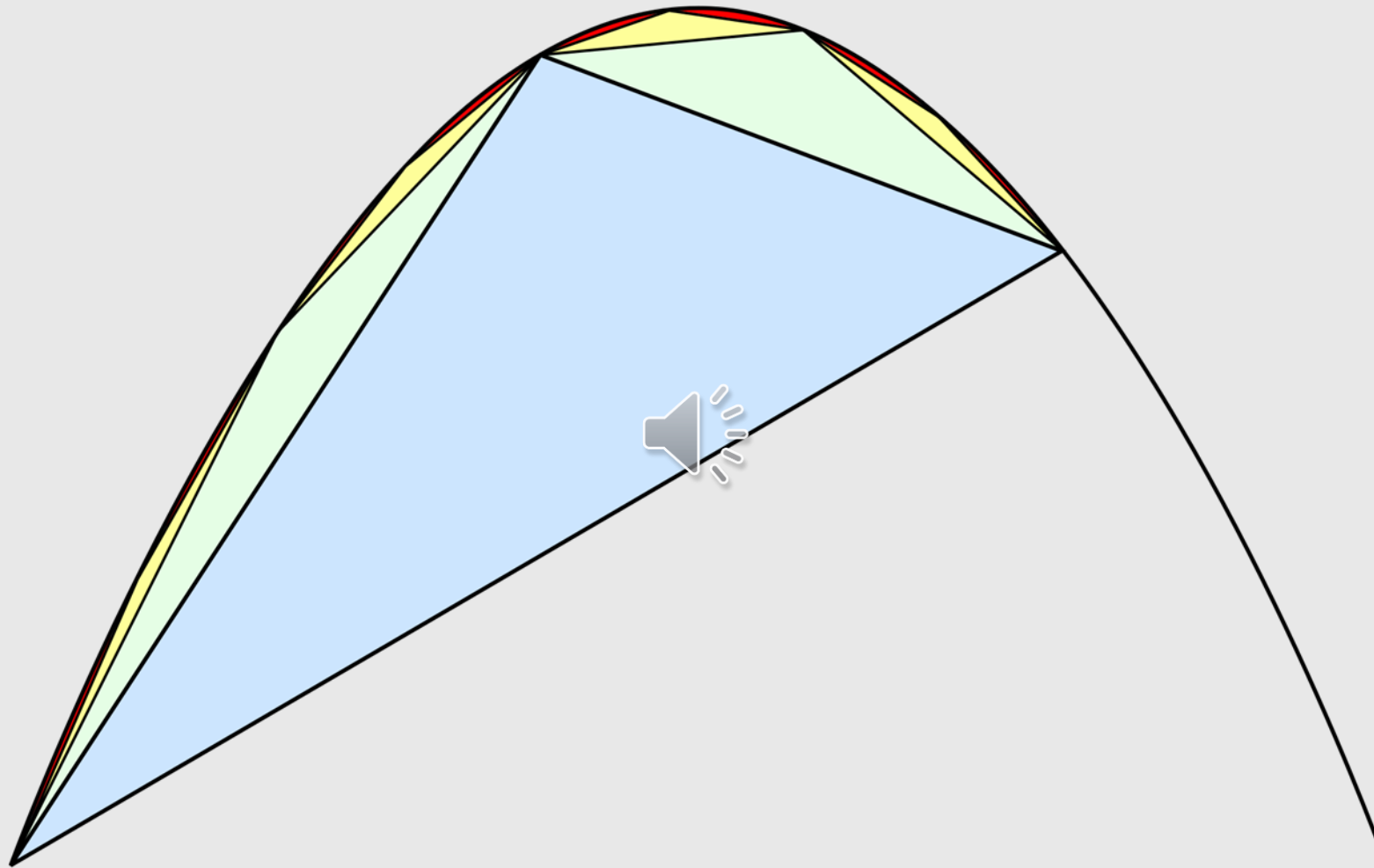


17世紀には、ロベルヴァルによって、
一般の曲線に対する接線を求める方法が発見され、
微分法が発展していきました。

積分法

もう一方の積分はどのように発展してきたのでしょうか？

<https://ja.wikipedia.org/wiki/放物線の求積>



最も重要な成果は，取り尽くし法です．

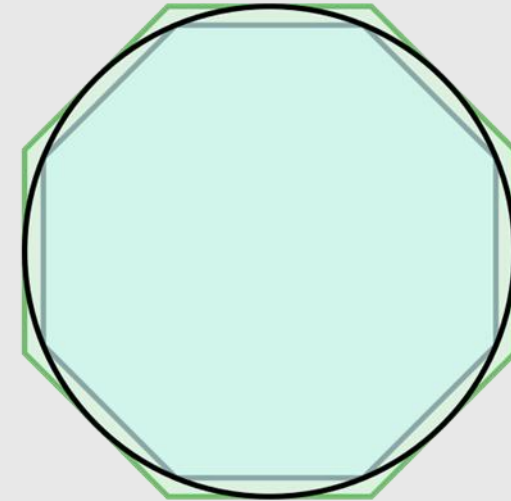
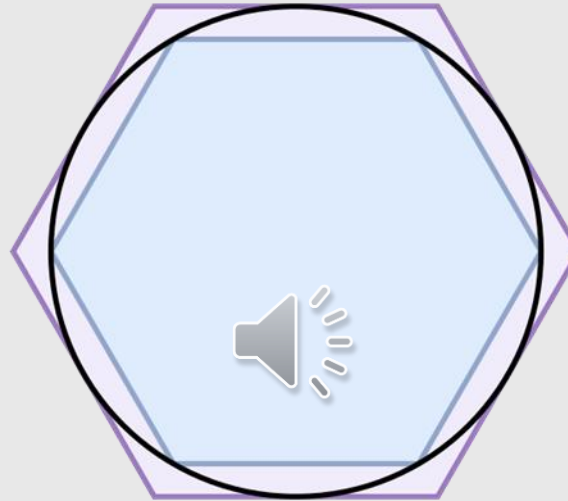
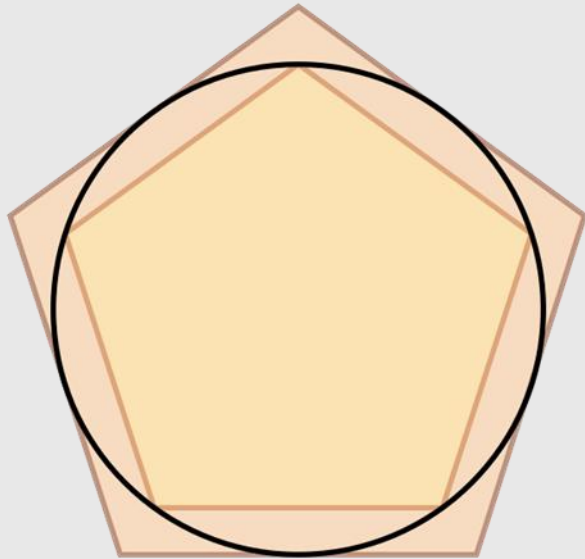
<https://ja.wikipedia.org/wiki/アルキメデス>

アルキメデス



取り尽くし法は、ユークリッドの『原論』第12巻でも論じられており、
エウドクソスによって理論付けされ、
アルキメデスによって完成されました。

<https://ja.wikipedia.org/wiki/取り尽くし法>



**取り尽くし法は，例えば放物線と直線によって囲まれてできる
図形の面積を求めるときに，図形を無数の三角形に分割して，
それらの面積をすべて足し合わせることによって，
面積を計算するというものです。**

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots$$

この計算では無限和が出てきますが、
この問題をうまく回避したのがアルキメデスと言われています。

<https://ja.wikipedia.org/wiki/ボナヴェントゥーラ・カヴァリエーリ>

カヴァリエリ



**1600年代に入ると、
カヴァリエリが『不可分者による連続体の新幾何学』にて、
カヴァリエリの原理を発表しました。**

<https://ja.wikipedia.org/wiki/ピエール・ド・フェルマー>

<https://ja.wikipedia.org/wiki/エヴァンジェリスタ・トリチェリ>

フェルマー

トリチェリ



カヴァリエリの原理を利用して、
フェルマーやトリチェリが回転体の体積などを計算しました。

微分と積分の統一

微分と積分はそれぞれ独立に発展してきましたが、
微分積分学の基本定理の発見によって、
この2つは統一されることになります。

<https://ja.wikipedia.org/wiki/アイザック・バロー> <https://ja.wikipedia.org/wiki/ジェームス・グレゴリー>

バロー

グレゴリー



微分積分学の基本定理は第1基本定理と第2基本定理の2種類があります。

バローとグレゴリーによって、

微分積分学の基本定理の幾何学的な理解が進みました。

<https://ja.wikipedia.org/wiki/アイザック・ニュートン>

ニュートン



ニュートンは古典力学を確立した物理学者として知られています。

彼の著作である『プリンキピア』において、

物理学に幾何学や極限が初めて導入されました。

ニュートンが導入した微分積分は、幾何学的なものでした。

ニュートンの記法

$$\dot{f}, \ddot{f}, \dddot{f}$$

ライプニッツの記法

$$\frac{df}{dx}, \frac{d^2 f}{dx^2}, \frac{d^3 f}{dx^3}$$

ニュートンは微分や積分に関する様々な記号を導入しましたが、
現在主に使われている表記はライプニッツによるものです。

<https://ja.wikipedia.org/wiki/ゴットフリート・ライプニッツ>

ライプニッツ



ライプニッツは微分積分学をより厳密に、
解析学へと発展させた人物として知られています。

<https://ja.wikipedia.org/wiki/アイザック・ニュートン>

<https://ja.wikipedia.org/wiki/ゴットフリート・ライプニッツ>

ニュートン

ライプニッツ



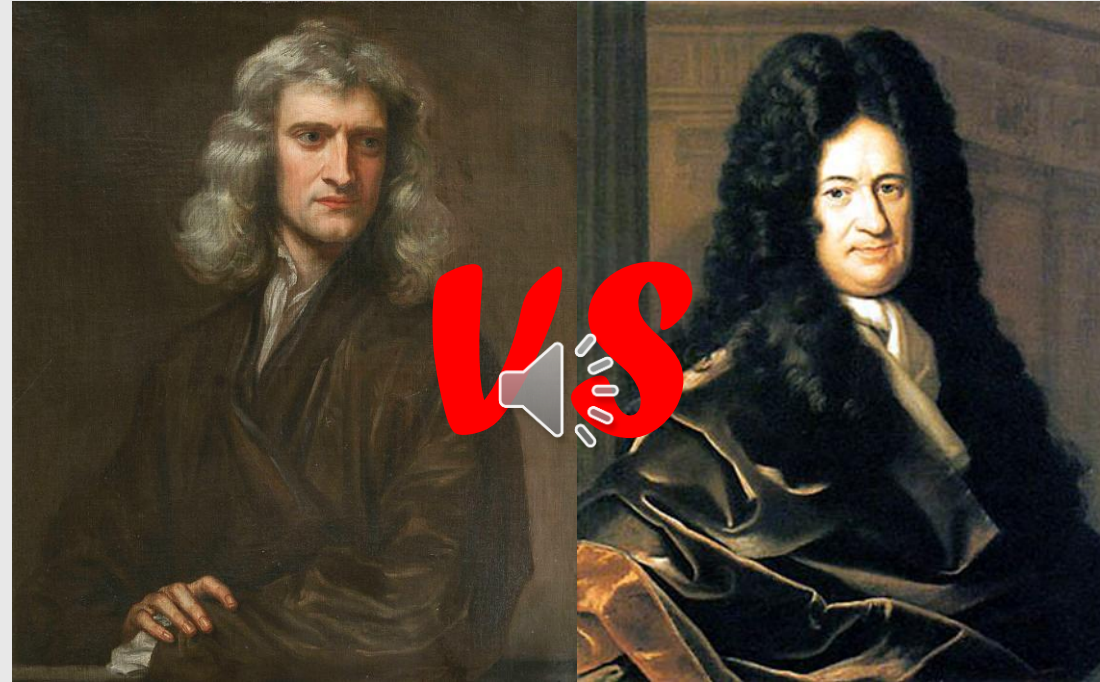
微分積分学を最初に体系化したのはニュートンですが、
それを本にまとめたのはライプニッツが先でした。

<https://ja.wikipedia.org/wiki/アイザック・ニュートン>

<https://ja.wikipedia.org/wiki/ゴットフリート・ライプニッツ>

ニュートン

ライプニッツ



当初，ライプニッツの著書は

「ニュートンの盗作だ」として非難されていましたが，現在では，

ニュートンとライプニッツは独自に微分積分学を確立したとされています．

<https://ja.wikipedia.org/wiki/オーギュスタン＝ルイ・コーシー>

<https://ja.wikipedia.org/wiki/ベルンハルト・リーマン>

<https://ja.wikipedia.org/wiki/カール・ワイエルシュトラス>

<https://ja.wikipedia.org/wiki/アンリ・ルベーク>

<https://ja.wikipedia.org/wiki/ヘルマン・アムドゥス・シュヴァルツ>



その後，コーシーやリーマン，ワイエルシュトラスなどによって，
より厳密な微分積分学が構築され，ルベークやシュワルツによって，
微分や積分が拡張されることになります。

高校数学における 積分

今では、微分積分学はなくてはならない存在となっています。
高校でも教えられていますが、これには問題(?)があります。

$$f'(x)$$

高校数学では，微分を次のように定義します．

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

a を実数とします．実数から実数への関数 $f(x)$ に対して，
この極限が存在するとき，

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$f(x)$ は $x = a$ において微分可能であるといい、
この極限値を $f'(a)$ で表します。

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

任意の実数 a に対して、 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるとき、
 $f(x)$ は微分可能であるといい、 $f'(x)$ を $f(x)$ の導関数といいます。

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

この定義は正しいものであり，何の問題もありません．

$$\int f(x) dx$$

一方，積分は次のように定義されます．

$$F'(x) \stackrel{\text{⏮}}{=} f(x)$$

$f(x)$ を実数から実数への関数とします.

ある関数 $F(x)$ が存在して、この等式が成り立つとき、

$$\int f(x) dx \stackrel{\text{スピーカー}}{=} F(x) + C$$

$f(x)$ の不定積分をこのように表します.

$$\int f(x) dx \Rightarrow F(x) + C$$

ただし， C は積分定数と呼ばれる定数です．

※あくまでも「本来の定義とは異なる」だけです.

$$\int f(x) dx \stackrel{\text{スピーカー}}{=} F(x) + C$$

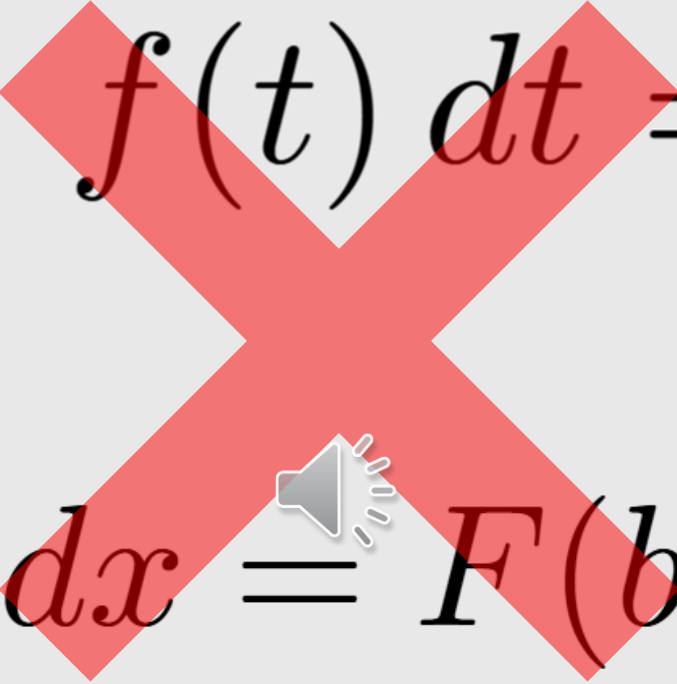
この定義は「本来の定義」ではありません.

$$\int_a^b f(x) dx \rightleftarrows \int f(x) dx$$

たしかに，結果的には正しいのですが，本来は定積分を先に定義し，
それによって不定積分を定義するからです。

$$f(x) \xrightleftharpoons[\text{微分}]{\text{積分}} F(x)$$

高校数学における積分の定義は，積分が微分の逆であるという，
微分積分学の基本定理を前提としたものであり，


$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$
$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

そのように定義しているだけでなく，
高校数学では実数の連続性や極限の厳密な定義を省略しているため，
微分積分学の基本定理を証明することは難しいのです．

2. 微分と積分の歴史

1. 微分法

2. 積分法

3. 微分と積分の統一

4. 高校数学における積分

ここから先は，積分を正しく定義し，
微分積分学の基本定理に証明を与えていきたいと思います。

MathAbyss

3. 微分積分学の基本定理

1. 微分積分学の第1基本定理

3. 微分積分学の基本定理

3. テイラーの定理

3. 微分積分学の基本定理

1. 微分積分学の第1基本定理
2. 微分積分学の第2基本定理
3. テイラーの定理

このチャプターでは，微分積分学の基本定理について解説していきます。

3. 微分積分学の基本定理

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} ???$$

本題に入る前に，積分の定義について確認しておきましょう．

3. 微分積分学の基本定理

$$a, b \in \mathbb{R} \quad (a < b)$$

ここからしばらくは, a, b を $a < b$ を満たす実数としておきます.

3. 微分積分学の基本定理

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

まず、 $n + 1$ 個の実数 $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ は
このような関係を満たしているとします.

3. 微分積分学の基本定理

$$[a, b] = \bigcup_{i=1}^n [x_{i-1}, x_i]$$

このとき，実数の区間について，このような等式が成り立ち，

3. 微分積分学の基本定理

$$\Delta = \{x_i\}_{i=0}^n$$

これを閉区間 $[a, b]$ の分割といいます。
ここでは、この分割を Δ で表すことにします。

3. 微分積分学の基本定理

$$t_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

分割されたそれぞれの区間から，代表元として実数を1つずつ選び，

3. 微分積分学の基本定理

$$\sum_{i=1}^n f(t_i) (x_i - x_{i-1})$$

閉区間 $[a, b]$ 上で有界な関数 f に対して，このような和を考えます．

3. 微分積分学の基本定理

$$\sum_{i=1}^n f(t_i) (x_i - x_{i-1})$$

これは f の分割 Δ に付随するリーマン和と呼ばれています。

3. 微分積分学の基本定理

$$|\Delta| := \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$$

ここで，閉区間 $[a, b]$ の分割 Δ に対して，
分割の幅をこのように定義しましょう．

3. 微分積分学の基本定理

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(t_i) (x_i - x_{i-1})$$

このとき，分割の取り方や代表元の選び方に依存せず，
リーマン和に関してこの極限が存在するとき，

3. 微分積分学の基本定理

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(t_i) (x_i - x_{i-1})$$

**f は $[a, b]$ 上でリーマン積分可能であるといい、
極限值をこのように表します。**

3. 微分積分学の基本定理

- リーマン積分
- ルベーク積分
- リーマン・スティルチェス積分
- ルベーク・スティルチェス積分
- ダニエル積分
- マクシェイン積分
- ヘンストック・クルツヴァイル積分
- ヤング積分
- 伊藤積分
- ストラノビッチ積分 ※確率積分

**高校数学で扱われる積分はリーマン積分ですが、
積分には、この後登場するルベーク積分など、
様々な種類の積分があります。**

微分積分学の基本定理

以上を踏まえて，微分積分学の基本定理について踏み込んでいくのですが，

微分積分学の第1基本定理 微分積分学の第2基本定理

微分積分学の基本定理には第1基本定理と第2基本定理の2つがあるので、
まずはその違いを明確にしておきましょう。

3. 微分積分学の基本定理

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

閉区間 $[a, b]$ 上で定義される連続な実数値関数 f に対して,

3. 微分積分学の基本定理

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

$[a, b]$ 上の関数 F をこのように定めます.

3. 微分積分学の基本定理

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

このとき、 F は (a, b) 上微分可能であり、この等式が成り立ちます。

3. 微分積分学の基本定理

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

これが微分積分学の第1基本定理です。

3. 微分積分学の基本定理

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

第1基本定理は

連続関数の不定積分の微分可能性について述べた定理と言えます。

3. 微分積分学の基本定理



一方，第2基本定理は次のような主張です．

3. 微分積分学の基本定理

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

閉区間 $[a, b]$ 上で定義されるリーマン積分可能な実数値関数 f に対して,

3. 微分積分学の基本定理

$$\exists F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ s.t. } F'(x) = f(x)$$

f の原始関数，すなわち導関数が f であるような関数 F が存在するとき，

3. 微分積分学の基本定理

$$\int_a^b f(x) \, dx \Rightarrow F(b) - F(a)$$

f のリーマン積分に関して，この等式が成り立ちます．

3. 微分積分学の基本定理

$$\int_a^b f(x) dx \Rightarrow F(b) - F(a)$$

第2基本定理は，定積分が，区間の端点における
原始関数の値によって決まることを述べた定理と言えます．

微分積分学の 第1基本定理

前置きが長くなってしまいましたが、
まずは第1基本定理を証明しましょう。

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

第1基本定理の主張はこのようなものでした。

要するに，微分と積分は互いに逆の関係であることを保証する定理です。

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in (a, b), \\ |x - t| < \delta \implies |f(x) - f(t)| < \varepsilon$$

f の連続性を言い換えるようになります。

$$\begin{cases} t + h \in (a, b) \\ h \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\} \end{cases}$$

よって、実数 h をこれらの条件を満たすようにとると

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| &= \frac{1}{|h|} \left| \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt - hf(x) \right| \\ &= \frac{1}{|h|} \left| \int_x^{x+h} f(t) dt - \int_x^{x+h} f(x) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \int_{\min\{x, x+h\}}^{\max\{x, x+h\}} |f(t) - f(x)| dt \\ &< \frac{1}{|h|} \int_{\min\{x, x+h\}}^{\max\{x, x+h\}} \varepsilon dt = \varepsilon \end{aligned}$$

このように計算できるので

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

主張を示すことができました。

微分積分学の 第2基本定理

あっという間でしたが，次に第2基本定理を証明しましょう．

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

閉区間 $[a, b]$ の分割を考えます.

$$\exists \xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \text{ s.t. } F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

分割されたそれぞれの区間に対して，平均値の定理より，各区間上のある実数 ξ_i が存在して，この等式が成り立ちます．

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

よって、このように計算することができ、

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x) dx$$

f はリーマン積分可能ですから，この極限は収束します．

$$\int_a^b f(x) dx \Rightarrow F(b) - F(a)$$

したがって、第2基本定理も証明することができました。

テイラーの定理

このチャプターの最後に，微分積分学の基本定理を用いた，
テイラーの定理の証明を紹介します．

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt$$

今回は、この等式を示すのが目標です。

ベルヌーイの剰余項で考えていることに注意が必要です。

$$f(x) - f(a) \stackrel{\text{スピーカー}}{=} \int_a^x f'(t) dt$$

第2基本定理より，この等式が成り立ちます．

$$\begin{aligned}\int_a^x f'(t) dt &= [f'(t)(t-x)]_a^x - \int_a^x f''(t)(t-x) dt \\ &= f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t) dt\end{aligned}$$

ここで、右辺の積分を部分積分を用いて計算すると、このようになります。

$$\begin{aligned}\int_a^x f''(t)(x-t) dt &= \left[-\frac{1}{2} f''(t)(x-t)^2 \right]_a^x + \int_a^x \frac{1}{2} f'''(t)(x-t)^2 dt \\ &= \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \int_a^x \frac{f'''(t)}{2!} (x-t)^2 dt\end{aligned}$$

第2項の積分についても，同様に部分積分していきます．

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt$$

これを繰り返すことで、テイラーの定理が得られ、

$$\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt$$

その剰余項として，ベルヌーイの剰余項とよばれる積分が出てくるのです．

3. 微分積分学の基本定理

1. 微分積分学の第1基本定理
2. 微分積分学の第2基本定理
3. テイラーの定理

微分積分学の基本定理の証明自体はそこまで難しくありませんが，証明のためには厳密な定義が重要になります．



4. 微分積分学の基本定理の一般化

4. 微分積分学の基本定理の一般化

1. 複素関数への一般化
2. 実解析への一般化
3. 多変数への一般化

4. 微分積分学の基本定理の一般化

1. 複素関数への一般化

2. 実解析への一般化

3. 多変数への一般化

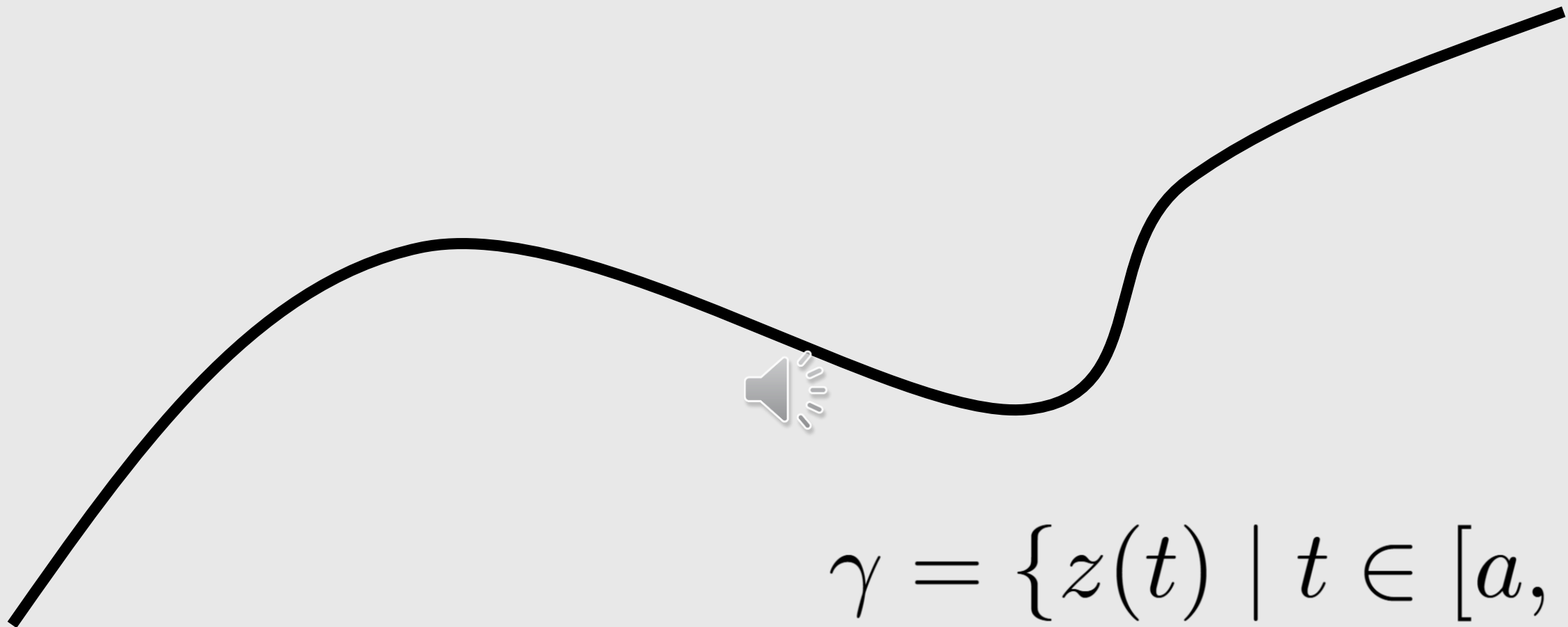
最後のチャプターでは、
微分積分学の基本定理を様々な方向に一般化していきます。

複素関数への一般化

まずは，複素関数への一般化を考えましょう．

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

複素数から複素数への正則関数 f を考えます。

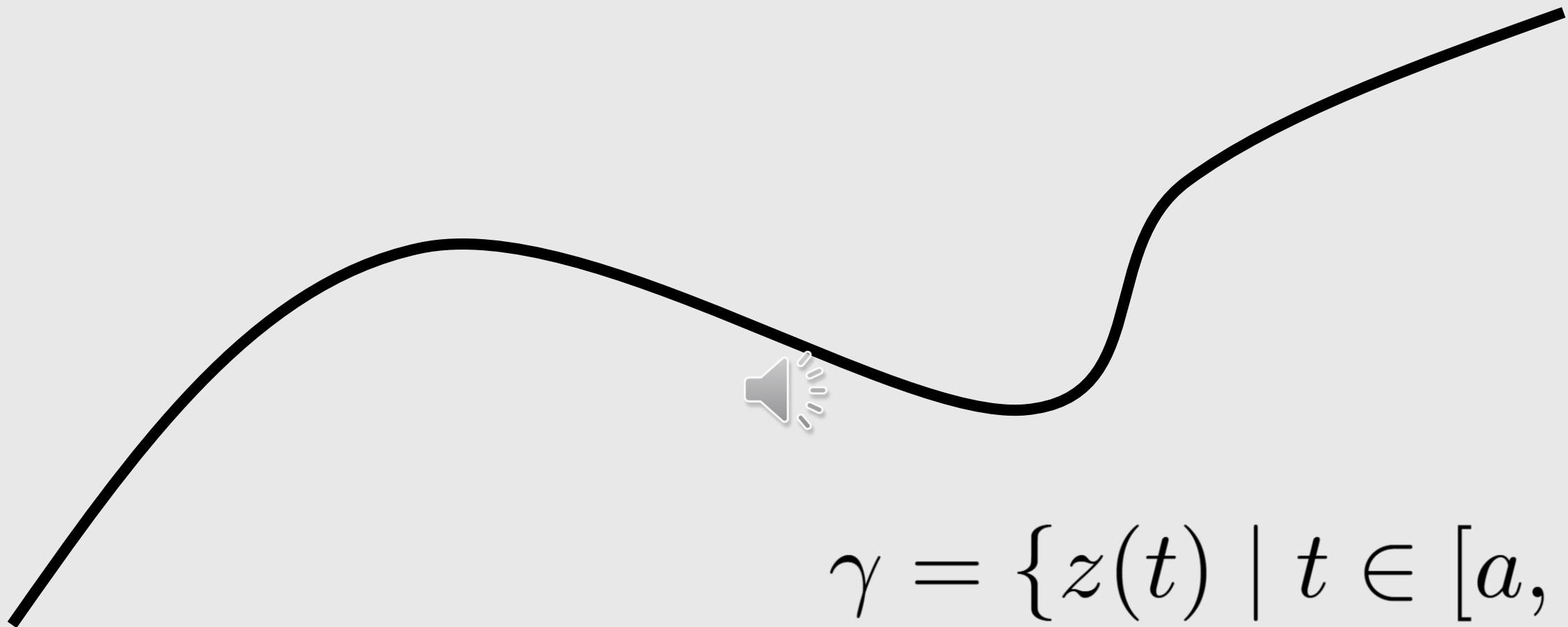


$$\gamma = \{z(t) \mid t \in [a, b]\}$$

γ を複素数平面上の曲線とし，閉区間 $[a, b]$ 上で定義される z によって
パラメータ付けされているとしましょう。

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt$$

このとき、 f の γ 上の積分はこのように定義されます。



$$\gamma = \{z(t) \mid t \in [a, b]\}$$

要するに，複素数平面上的の曲線に対して，
線積分を考えているというわけです．

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(z(b)) - F(z(a))$$

このとき，実関数の場合と同様に，微分積分学の基本定理が成り立ちます．

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(z(b)) - F(z(a))$$

これは複素関数論ではよく扱われる命題ですが，証明は簡単です．

$$\frac{d}{dt}F(z(t)) \Rightarrow f(z(t))z'(t)$$

原始関数と曲線のパラメータの合成関数を微分するとこのようになり、

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} F(z(t)) dt \\ &= F(z(b)) - F(z(a))\end{aligned}$$

実関数における微分積分学の基本定理を適用すると,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} F(z(t)) dt \\ &= F(z(b)) - F(z(a))\end{aligned}$$

すぐに主張が従います。

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(z(b)) - F(z(a))$$

複素関数の場合でも、
微分積分学の基本定理が成り立っていることが確かめられました。

実解析への一般化

次に，実解析への一般化を考えましょう．

実解析への一般化

ここからは，1次元のルベーグ積分について扱います．

$$\lambda^*(A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) \mid A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \right\}$$

実数の部分集合 A のルベーグ外測度を，
 A を覆う閉区間列の，区間の長さの総和の下限として定義します．

$$\lambda^*(S) = \lambda^*(S \cap A) + \lambda^*(S \cap A^c)$$

特に，実数の任意の部分集合 S に対して，
ルベーク外測度に関するこの等式，いわゆるカラテオドリの条件
が成り立つとき， A はルベーク可測であるといいます．

$$(1) \quad \mathcal{L} \neq \emptyset$$

$$(2) \quad A \in \mathcal{L} \implies A^c \in \mathcal{L}$$

$$(3) \quad A_1, A_2 \in \mathcal{L} \implies A_1 \cup A_2 \in \mathcal{L}$$

ルベグ可測な集合全体からなる集合族 $\mathcal{L}$ は完全加法族であり、
これらの性質を満たします。

$$\lambda : \mathcal{L} \rightarrow [0, \infty]; A \mapsto \lambda^*(A)$$

そして、ルベーク可測な集合を、
その集合の外測度に対応させる関数をルベーク測度といいます。

$$(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$$

このようにして構成されるルベーグ測度空間で、
ルベーグ積分を定義していきます。

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx$$

まず，単関数のルベーグ積分を定義します．

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}(x)$$

可測集合と非負実数を用いて，このように表すことができる関数を単関数といいます．ここで， χ は定義関数です．

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx \coloneqq \sum_{i=1}^n a_i \lambda(A_i)$$

このとき，単関数のルベーグ積分を，このように定義します．

$$f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$$

次に，非負の値をとる可測関数のルベーグ積分を定義します．

$$f^{-1}((a, \infty]) \in \mathcal{L}$$

f がルベグ可測関数であるとは、
任意の実数 a に対して、 $f(x)$ が a より大きくなるような x 全体の集合が、
ルベグ可測集合であることをいいます。

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx := \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} s(x) dx \mid s: \text{単関数}, 0 \leq s \leq f \right\}$$

非負の値をとる関数のルベグ積分を，
単関数のルベグ積分を用いて，このように定義します．

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$$

$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\}$$

$$f^-(x) := \min\{-f(x), 0\}$$

そして、一般の可測関数のルベグ積分は、
関数をこのように分解することで、

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \, dx := \int_{\mathbb{R}} f^{+}(x) \, dx - \int_{\mathbb{R}} f^{-}(x) \, dx$$

ルベグ積分を定義することができます。

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$


ルベーク積分では、微分積分学の基本定理に相当する主張は、
一般に成り立ちません。

$$c : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

その代表的な例として，カントール関数があります．

$$x = 0.76715947 \dots$$



$$0.202201021 \dots (3)$$

カントール関数は、0以上1以下の実数 x を3進数で表し、

0.202201021...



0.000001000...

0はそのまま, 2は0に変え,
最初に現れた1はそのままにして, それ以降の数字をすべて0にします.

$$0.000001000 \dots (2)$$

$$0.015625$$

このようにして得られた数を2進数で表された実数とみなすことにより,

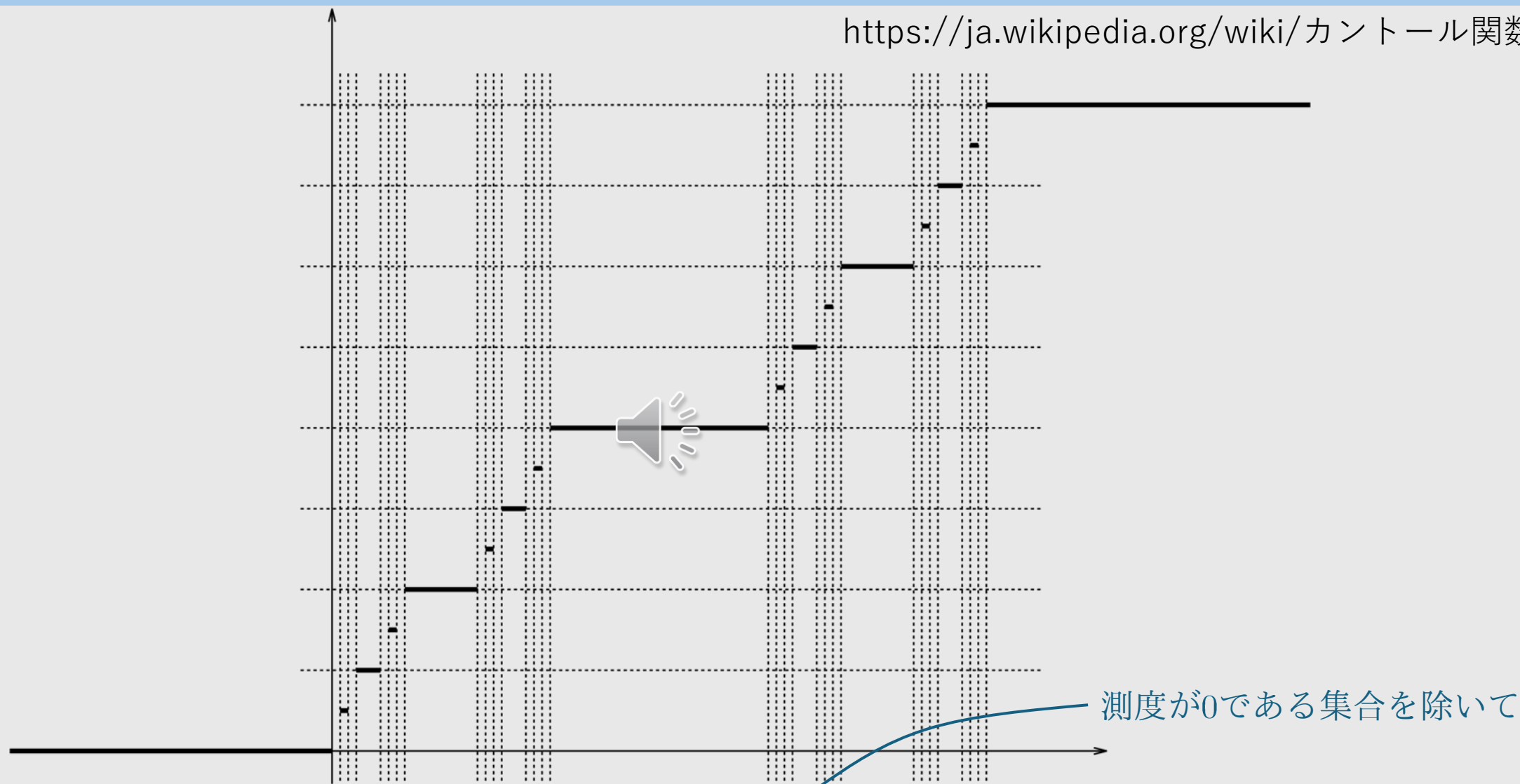
$$c : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

0以上1以下の実数を0以上1以下の実数に対応させる関数が得られます。

$$c : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

これをコントロール関数といいます。

<https://ja.wikipedia.org/wiki/カントール関数>



カントール関数は連続であり、ほとんど至る所で微分可能ですが、

$$\int_0^1 c'(x) dx = 0$$

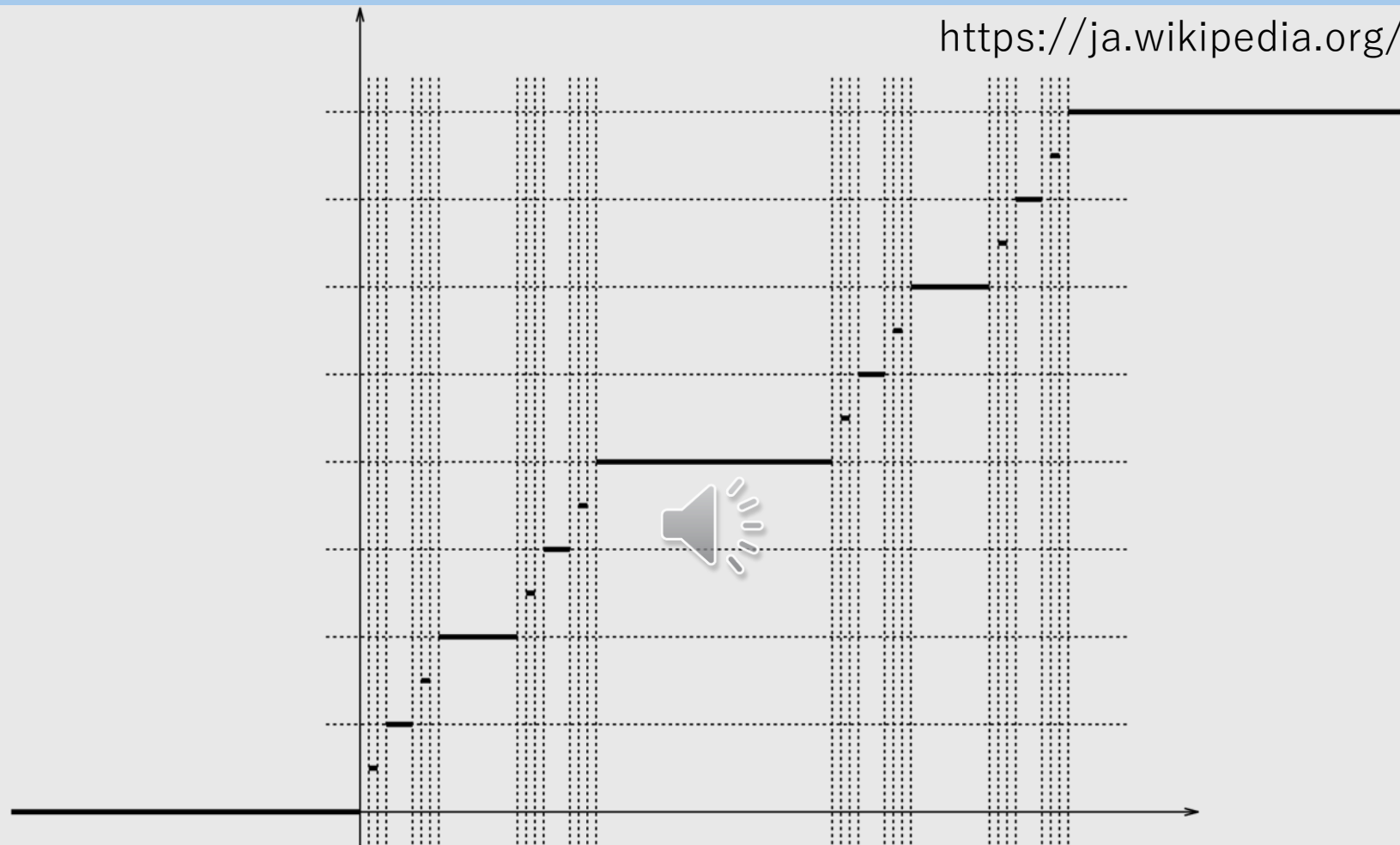
$$c(1) - c(0) = 1$$

その導関数のルベーク積分の値は0であり、
区間の端点における関数の値の差に一致しません。

$$\int_0^1 c'(x) dx \neq c(1) - c(0)$$

よって，微分積分学の基本定理に相当する主張は成り立たないのです．

<https://ja.wikipedia.org/wiki/コントロール関数>



**実は、コントロール関数は、
連続であるが絶対連続でない関数の代表的な例です。**

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall [a_i, b_i] \subset [a, b],$$

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta \implies \sum_{i=1}^n |F(b_i) - F(a_i)| < \varepsilon$$

区間の長さの総和を十分小さくすることで、

各区間の端点における関数の差の総和がいくらでも小さくなる関数を、

絶対連続関数といいます。

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall [a_i, b_i] \subset [a, b],$$

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^n |F(b_i) - F(a_i)| < \varepsilon$$

ここで，絶対連続性の重要性を理解するために，
測度 ν が σ -有限であることの定義を述べておきましょう．

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots$$
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{R}$$

和が実数全体になるような，実数の部分集合の上昇列が存在して，

$$\forall n \in \mathbb{N}, \nu(A_n) < \infty$$

この主張が成り立つとき， ν は σ -有限であるといいます．

$$\lambda(A) = 0 \implies \nu(A) = 0$$

σ -有限な測度 ν が σ -有限な測度 λ に対して絶対連続，
すなわちこの命題が成り立つとき，

$$\nu(A) = \int_A f d\lambda$$

任意の可測集合 A に対して，ある可測関数 f が存在して，
この等式が成り立ちます．

$$f = \frac{d\nu}{d\lambda}$$

これはラドン・ニコディムの定理といい、
 f はラドン・ニコディム微分と呼ばれています。

$\lambda, \nu : \sigma$ 有限な測度
 ν が λ に対して絶対連続



ラドン・ニコディム微分 $\frac{d\nu}{d\lambda}$ が存在

ラドン・ニコディムの定理は，測度の絶対連続性を仮定することで，
ラドン・ニコディム微分の存在を保証しています．

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall [a_i, b_i] \subset [a, b],$$

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta \implies \sum_{i=1}^n |F(b_i) - F(a_i)| < \varepsilon$$

これを関数の絶対連続性に落とし込むと，次の定理が得られます．

$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : \text{絶対連続}$

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t) dt$$

有界閉区間上で絶対連続である関数が、ほとんど至る所で微分可能かつ、導関数が可測関数であるならば、この等式が成り立ちます。

$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : \text{絶対連続}$

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t) dt$$

これはルベグ積分における，微分積分学の第2基本定理です．

$$c(x) \neq c(0) + \int_0^x c'(t) dt$$

絶対連続でないカントール関数は，この定理を満たしません．

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt = 0$$

そして、可積分関数は、ほとんど至る所でこの等式が成り立ちます。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(x)$$

特に，ほとんど至る所で微分公式が成り立ちます．

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(x)$$

これはルベークの微分定理と呼ばれています。

多変数への一般化

最後に，微分積分学の基本定理の，多変数への一般化を考えてみましょう．

$$\int_a^b f(x) dx \Rightarrow F(b) - F(a)$$

通常の微分積分学の基本定理は，有界閉区間上の関数の積分が，その境界に当たる端点によって与えられるというものでした．

$$\int_{\Omega} d\omega \stackrel{\text{スピーカー}}{=} \int_{\partial\Omega} \omega$$

これを高次元に一般化すると， n 次元領域上の関数の積分が，その境界である $n - 1$ 次元の領域によって与えられるという，一般化ストークスの定理に行き着きます．

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} (P dx + Q dy)$$

グリーンの定理や,

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

通常のストークスの定理,

$$\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV = \iint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

ガウスの発散定理などは，一般化ストークスの定理の特殊な場合であることが分かります．

4. 微分積分学の基本定理の一般化

1. 複素関数への一般化

2. 実解析への一般化

3. 多変数への一般化

微分積分学の基本定理の一般化には，豊かな世界が広がっているのです。

MathAbyss

「積分」が「微分」の逆であるとはどういうことか

5. まとめ

いかがでしたか？

「積分」が「微分」の逆であるとはどういうことか

- 微分と積分の歴史
- 微分積分学の基本定理の一般化
- 複素関数論の第1基本定理
- 実関数論の第2基本定理
- 微分と積分の統一
- 多変数への応用
- 高校数学における積分

この動画では、微分積分学の基本定理と、その一般化について、
詳しく解説しました。

「積分」が「微分」の逆であるとはどういうことか



この動画で紹介しきれなかった話題や、
詳細を省略してしまった内容もありますが、
楽しんでいただけましたでしょうか？

「積分」が「微分」の逆であるとはどういうことか

MathAbyssでは，数学に関する記事を公開しているWebサイト
「MathAbyss」を運営しております．

今後も様々な動画を制作していきますので，
この動画に対する高評価，YouTubeのチャンネル登録を
よろしくお願いします！

各種SNS等のフォローもしていただけると励みになります！

最後までご視聴いただき，ありがとうございました！！！！



MathAbyss

ご視聴ありがとうございました！
チャンネル登録よろしくお願いします！