



**高校数学の「常識」が真実とは限らない**



**何が「当たり前」で何が「あり得ない」のか**

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^n {}^nC_r a^r b^{n-r}$$

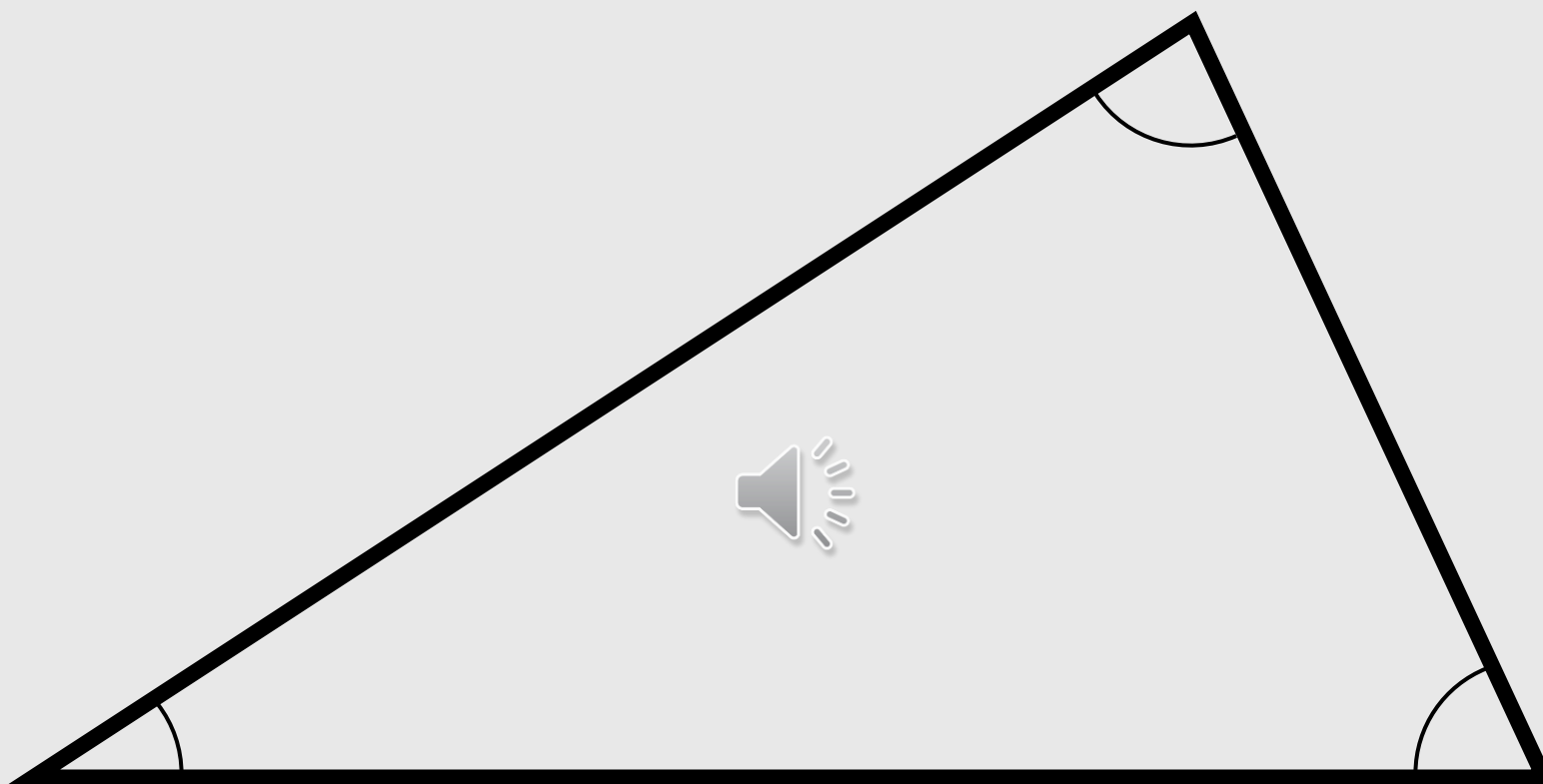
展開の計算は本当に面倒なのか

$$\sin x \neq 2$$

sinが2になることは本当にならないのか

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

**$(1/2)!$ はないのか**



三角形の内角の和は本当に $180^\circ$ なのか

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_m^{a_m}$$

素因数分解はただ一つしか存在しないのか

# 高校数学

真実は「高校数学のその先」だけが知っている

# 大学数学

大学数学の世界へ，ようこそ．



MathAbyss

MathAbyss

# 高校数学の 「常識」を壊そう

1. イントロダクション

2. 一年生の夢

$$3. \sin x = 2$$

$$4. (1/2)! = ???$$

5. 内角の和が180 でない三角形

6. 素因数分解の仕方が複数ある世界

7. まとめ

この動画は，7つのチャプターによって構成されています．

1. イントロダクション

2. 一年生の夢

3.  $\sin x = 2$

4.  $(1/2)! = ???$

5. 内角の和が180 でない三角形

6. 素因数分解の仕方が複数ある世界

7. まとめ

次のチャプターでは、式の展開の「常識」を壊します。

1. イントロダクション

2. 一年生の夢

3.  $\sin x = 2$

4.  $(1/2)! = ???$

5. 内角の和が180 でない三角形

6. 素因数分解の仕方が複数ある世界

7. まとめ

そして、三角関数や階乗の定義を拡張し、

1. イントロダクション

2. 一年生の夢

3.  $\sin x = 2$

4.  $(1/2)! = ???$

5. 内角の和が180 でない三角形

6. 素因数分解の仕方が複数ある世界

7. まとめ

高校数学における幾何学の「常識」を壊し、

1. イントロダクション

2. 一年生の夢

3.  $\sin x = 2$

4.  $(1/2)! = ???$

5. 内角の和が180 でない三角形

6. 素因数分解の仕方が複数ある世界

7. まとめ

整数がいかに特別な集合であるかを解説していきます。

1. イントロダクション

2. 一年生の夢

3.  $\sin x = 2$

4.  $(1/2)! = ???$

5. 内角の和が180 でない三角形

6. 素因数分解の仕方が複数ある世界

7. まとめ

高校数学から出発する大学数学の世界を堪能しましょう！

## 2. 一年生の夢

1. 展開の公式  
2. 二項定理  
3. 多項定理  
4. 一年生の夢

# 2. 一年生の夢

# 2. 一年生の夢

1. 展開の公式

2. 二項定理

3. 多項定理

4. 一年生の夢

まずは、一年生の夢について、お話したいと思います。

# 2. 一年生の夢

1. 展開の公式

2. 二項定理

3. 多項定理

4. 一年生の夢

最初に断っておくと，一年生の夢は，立派な数学用語です．

# 展開の公式

中学数学や高校数学では，展開の公式を扱います．

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

中学3年生の数学で，この4つの公式を扱い，

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

数学Ⅰでは新たに1つの公式が加わり、

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) \overset{\text{スピーカーアイコン}}{=} a^3 \pm b^3$$

数学IIで、3乗バージョンの公式を学びます。

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) \overset{\text{スピーカー}}{=} a^3 \pm b^3$$

実際には、数学Ⅰで展開の公式を扱うタイミングで、  
本来なら数学Ⅱで扱う公式も同時に学ぶ、  
というケースが少なくありません。

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(A + B)C \stackrel{\text{スピーカー}}{=} AC + BC$$

これらの公式は，分配法則を用いることで，その成立が確認できます．

# 二項定理

数学IIでは，その後，二項定理を扱います．

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

二項定理は，これらの4つの公式を一般化したものであり，

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^n {}_nC_r a^r b^{n-r}$$

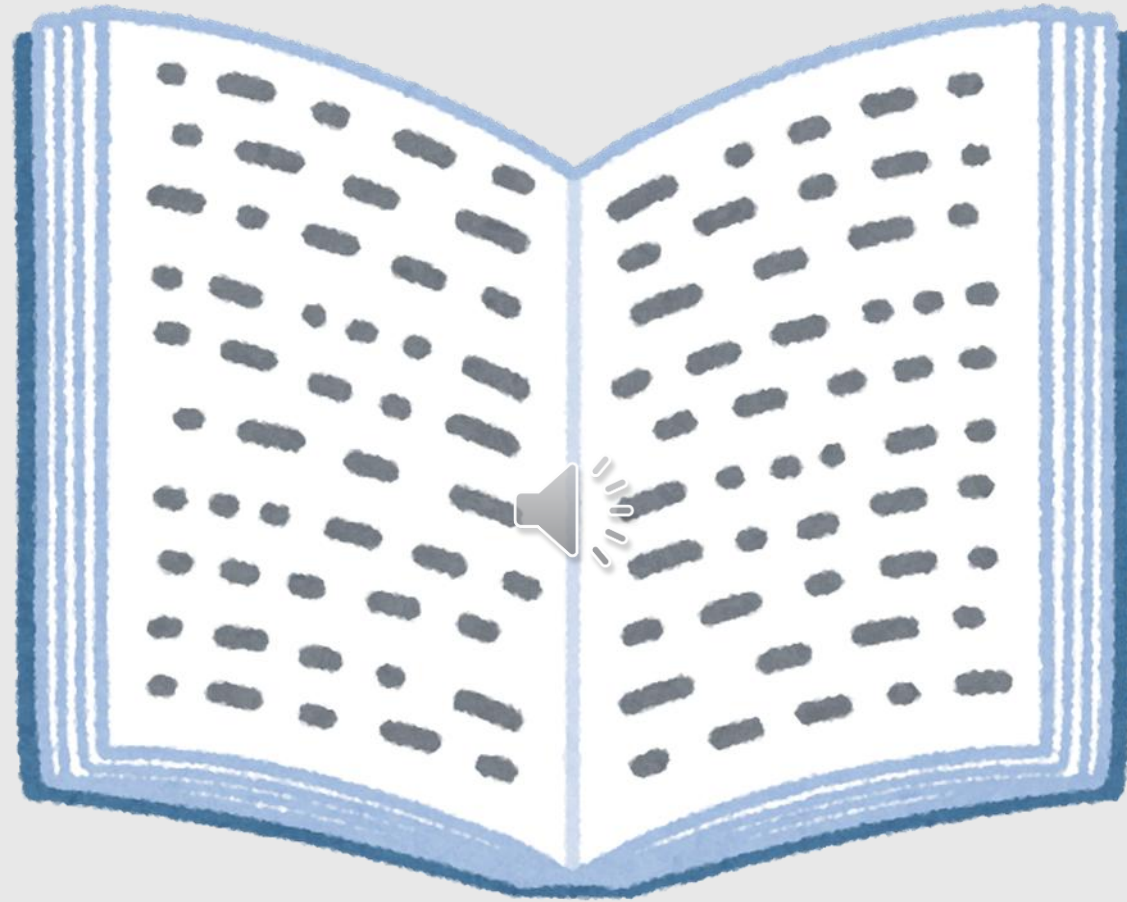
このような式で与えられます。

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^n {}_nC_r a^r b^{n-r}$$

証明は，数学的帰納法や場合の数など，様々な方法があります．

# 多項定理

そして、二項定理をさらに一般化したものが、多項定理です。



多項定理が掲載されている参考書や問題集は  
しばしば見かけることがあります。



今初めて知ったという人もいるのではないのでしょうか。

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n$$

多項定理は，文字通り，二項定理の項を増やしたものであり，

$$(x_1 + \cdots + x_m)^n = \sum_{i_1 + \cdots + i_m = n} \frac{n!}{i_1! \cdots i_m!} x_1^{i_1} \cdots x_m^{i_m}$$

このような式で与えられます。

$$(x_1 + \cdots + x_m)^n = \sum_{i_1 + \cdots + i_m = n} \frac{n!}{i_1! \cdots i_m!} x_1^{i_1} \cdots x_m^{i_m}$$

随分複雑な式ですが、

どのような形の式の和をとっているのかに注目することが重要です。

$$\frac{n!}{i_1! \cdots i_m!}$$

$x_1^{i_1}, x_2^{i_2}, \dots, x_m^{i_m}$  の係数は、このような式になっており、

$$i_1 + \cdots + i_m = n$$

$i_1$  から  $i_m$  までの和は  $n$  になっています.

$$\underbrace{x_1 \cdot \cdots \cdot x_1}_{i_1} \cdot \cdots \cdot \underbrace{x_m \cdot \cdots \cdot x_m}_{i_m}$$


これは、 $x_1$ が $i_1$ 個、 $x_2$ が $i_2$ 個、 $x_m$ が $i_m$ 個、  
合計 $n$ 個のものを並び替えるという、  
同じものを含む順列の総数に等しくなります。

$$(x_1 + \cdots + x_m)^n = \sum_{i_1 + \cdots + i_m = n} \frac{n!}{i_1! \cdots i_m!} x_1^{i_1} \cdots x_m^{i_m}$$

これで，多項定理の式のイメージが掴めたのではないのでしょうか．

# 一年生の夢



では、いよいよ一年生の夢についてお話ししましょう。

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^n {}_nC_r a^r b^{n-r}$$

ここまでで、

式の展開はとても面倒な計算であるということがよく分かったと思います。

$$(a + b)^n = a^n + b^n \quad (?)$$

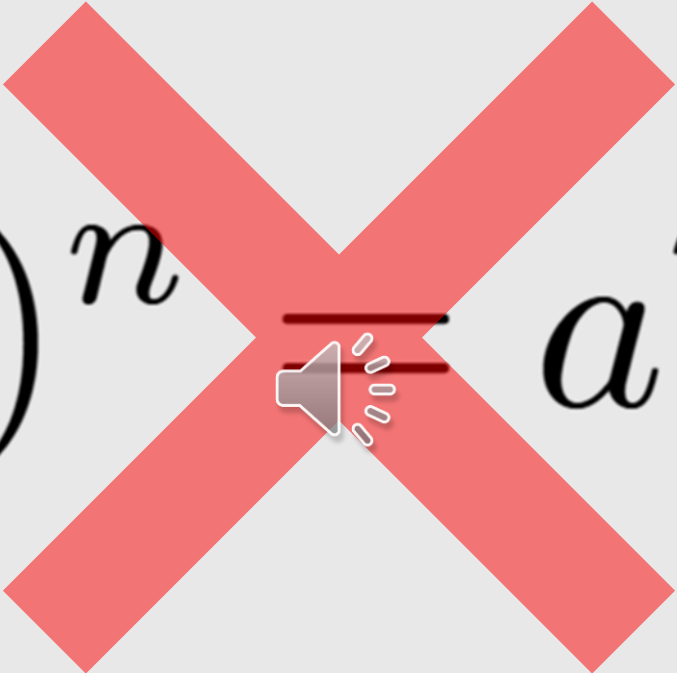
もし，式の展開がこのくらい簡単であれば，  
これほど嬉しいことはありません．

$$(a + b)^n \stackrel{\text{≠}}{=} a^n + b^n$$

この理想的な等式は，一年生の夢と呼ばれています．

$$(a + b)^n \Rightarrow a^n + b^n$$

文字通り，数学を学び始めた一年生が抱く願望が詰め込まれた式です．


$$(a + b)^n = a^n + b^n$$

もちろん，この等式は実数の世界では成り立ちません．

$$(a + b)^n \neq a^n + b^n$$

しかし，一年生の夢が叶う世界があります．

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \dots$$

その一つが，標数が素数である可換環です．

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

ここでは、整数を3で割った余りで同一視する集合 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ を考えましょう。

$$1 \equiv 4 \pmod{3}$$



$$\bar{1} = \bar{4}$$

例えば，1と4は，3で割った余りがともに1で等しいので，  
この2つは同じものだと考えます．

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2} \}$$

このとき、 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ は3つの要素からなる集合であることが分かります。

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ab}$$

$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ での加法と乗法は，このように定義することができます．

$$\bar{a} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{a} = \bar{a}$$

$\bar{0}$ は，加法についてこの性質が成り立つ要素であり，  
加法単位元といいます。

$$\bar{a} \cdot \bar{1} = \bar{1} \cdot \bar{a} = \bar{a}$$

一方， $\bar{1}$ は，乗法について同様の性質が成り立つ要素であり，  
乗法単位元といいます。

$$\underbrace{\bar{1} + \bar{1} + \bar{1}}_3 = \bar{0}$$


$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ では，乗法単位元を3個足すことで，  
初めて加法単位元に等しくなります．

3

この3が， $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の標数になります．

$$(\bar{a} + \bar{b})^3 = \bar{a}^3 + 3\bar{a}^2\bar{b} + 3\bar{a}\bar{b}^2 + \bar{b}^3$$

$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ で，この式の展開を考えると，

$$(\bar{a} + \bar{b})^3 = \bar{a}^3 + 3\bar{a}^2\bar{b} + 3\bar{a}\bar{b}^2 + \bar{b}^3$$

最初の項と最後の項以外は0になるため、

$$(\bar{a} + \bar{b})^3 \neq \bar{a}^3 + \bar{b}^3$$

一年生の夢が，部分的に成り立つのです．

# 2. 一年生の夢

1. 展開の公式

2. 二項定理

3. 多項定理

4. 一年生の夢

一年生の夢や二年生の夢については、  
以前ショート動画でも解説しています。ぜひ、ご覧ください！

$$3. \sin x = 2$$

1. 三角比の定義
2. 三角関数の定義
3. 複素三角関数の定義
4.  $\sin x = 2$  を解く

# 3. $\sin x = 2$

1. 三角比の定義

2. 三角関数の定義

3. 複素三角関数の定義

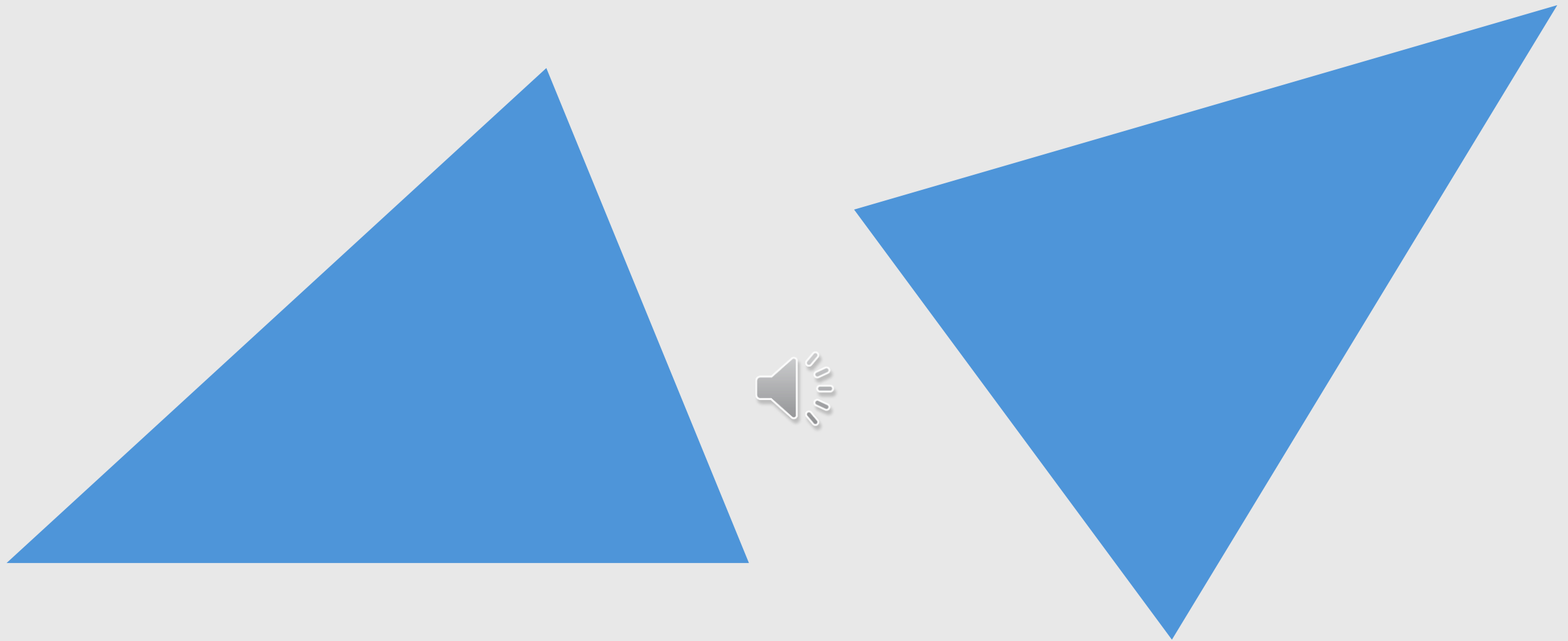
4.  $\sin x = 2$ を解く

このチャプターでは、 $\sin$ や $\cos$ が、

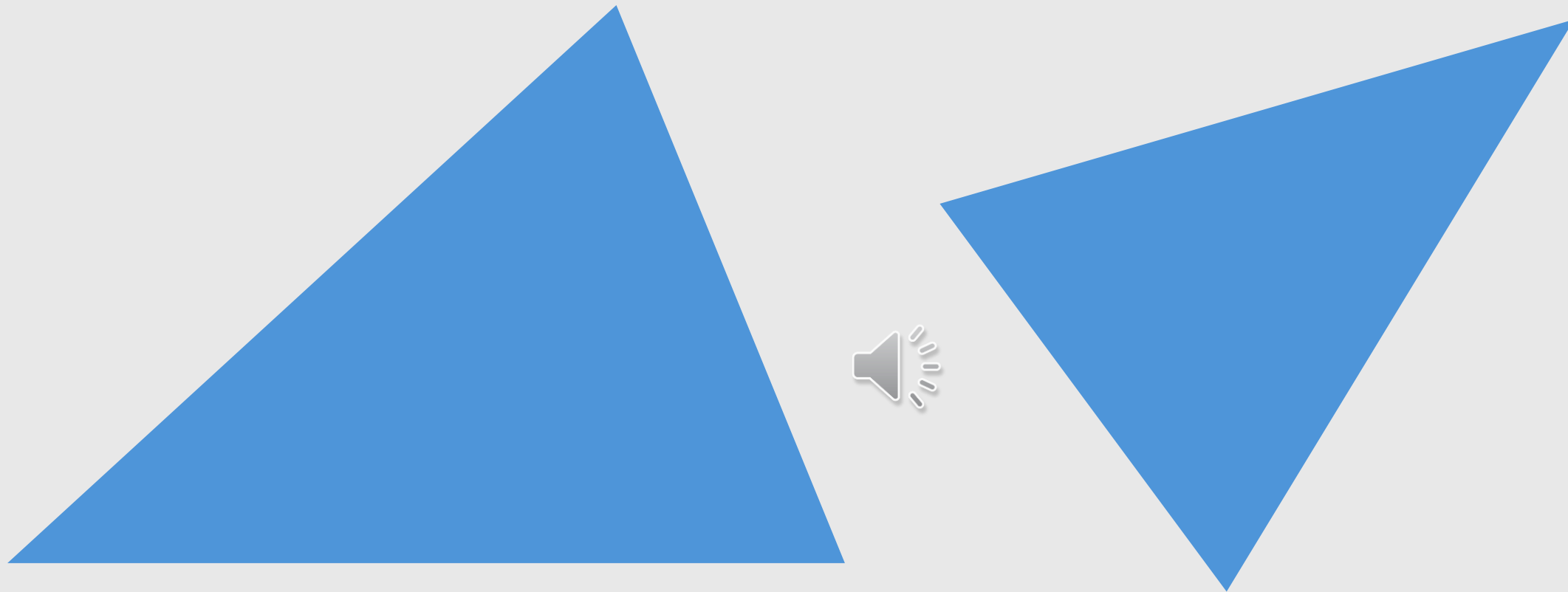
-1以上1以下の値しかとらないという常識を壊していきます。

# 三角比の定義

高校数学では，数学Ⅰで三角比を導入します．

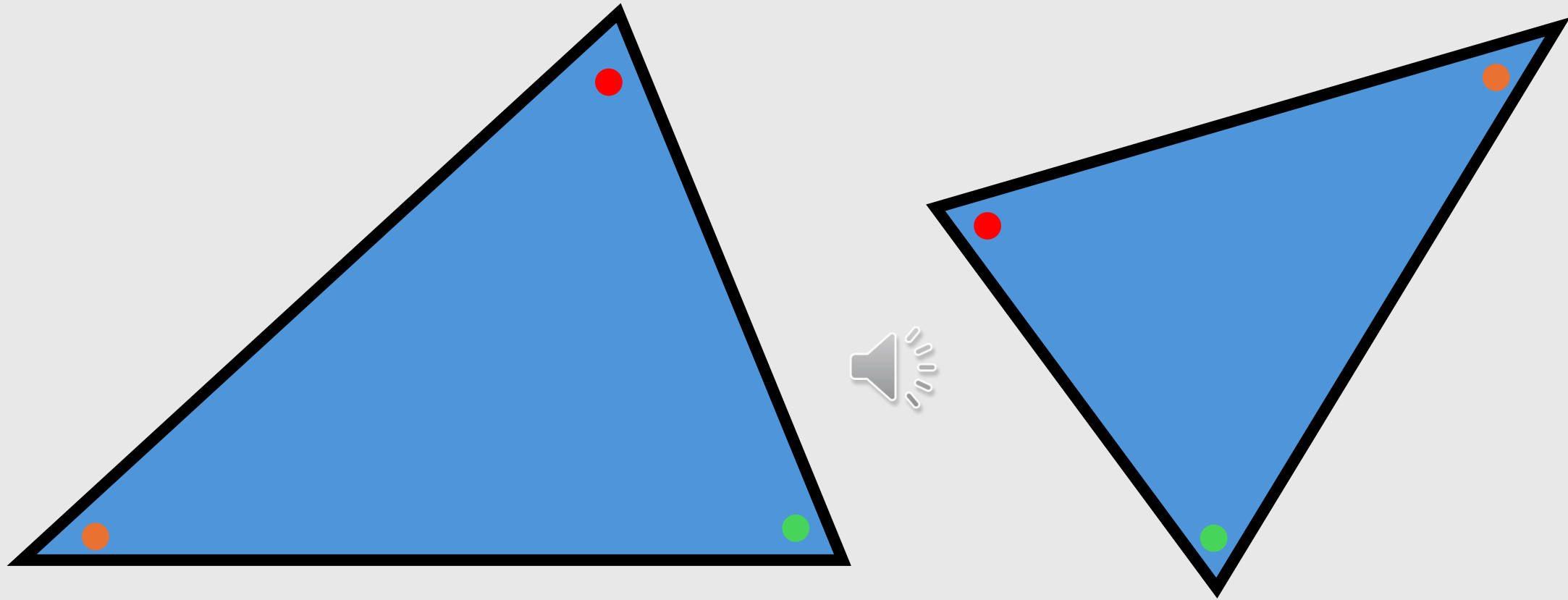


図形の合同は，平行移動，対称移動，回転移動して  
互いに移り合うものを同一視する概念であり，



図形の相似は，それに加えて，  
拡大や縮小で互いに移り合うものを同一視するという概念でした．

### 3. $\sin x = 2$

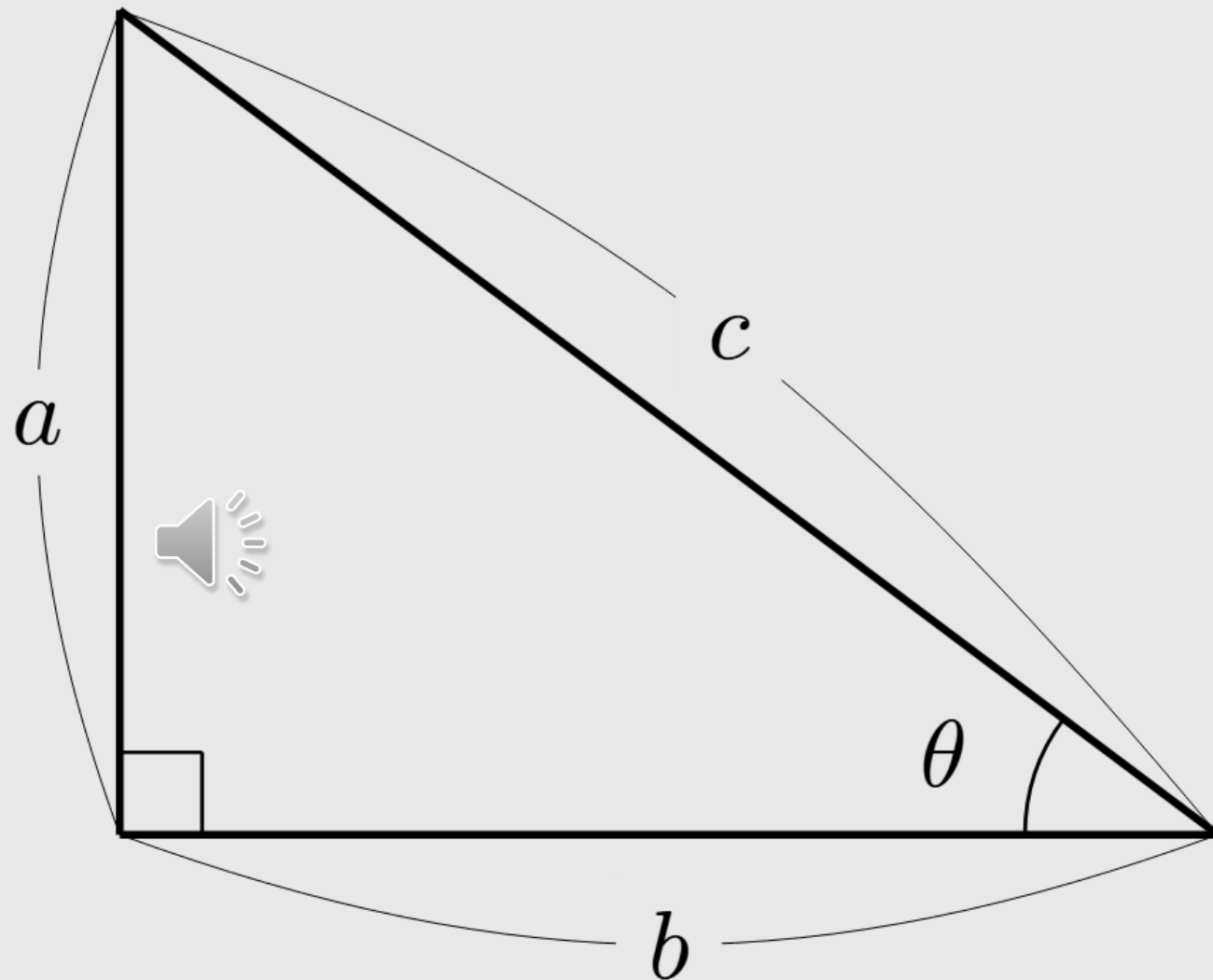


特に，三角形の辺の長さの比や角度は，図形の相似に対する不変量であり，

$$\sin \theta = \frac{a}{c}$$

$$\cos \theta = \frac{b}{c}$$

$$\tan \theta = \frac{a}{b}$$



三角比をこのように定義することができます。

# 三角関数の定義

数学IIでは，三角比を拡張して，三角関数を考えます．

$$2\pi \text{ rad} \stackrel{\text{≡}}{=} 360^\circ$$

まず，弧度法を導入し，一般角を定義します．

$\sin \theta$

そして、単位円周上の点の座標と、  
 $x$ 軸の正の部分となす角を対応させることで、三角関数を定義します。

$$\sin \theta$$

このとき，三角関数の定義域は，実数全体になり，

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1$$

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1$$

正弦関数や余弦関数の値域は， $-1$ 以上 $1$ 以下の実数全体になります．

$$\sin x \neq 2$$

したがって、 $\sin$ の値が2になることはありません。

# 複素三角関数の定義

しかし，三角関数の定義域を複素数に拡張すると，  
話は大きく変わります．

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$C^\infty$ 級，すなわち無限回微分可能な関数は，  
このように表すことができます．これをマクローリンの定理といいます．

$$\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

最後の項は剰余項と呼ばれており、

$$\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} x^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

剰余項が0に収束するとき,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

この関数はマクローリン展開と呼ばれる級数で表すことができます。

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

指数関数 $e^x$ は，このようにマクローリン展開することができ，

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

実数 $x$ を複素数 $z$ に変えても，右辺の級数は収束するので，

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

この式で，複素指数関数 $e^z$ を定義することができます．

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$


$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

このとき，複素三角関数をこのように定義します．

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

それぞれの級数表示を確認すると、

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

これは実三角関数のテイラー展開を含んでいることが確認できます。

$$\sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$


$$\cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

これで複素三角関数が定義できたわけですが、  
この関数の値域は複素数全体になります。

# $\sin x = 2$ を解く

それを体感するため、 $\sin$ の値が2になるような複素数を求めてみましょう。

$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = 2$$

左辺を定義に従って変形するとこのようになり、

$$e^{2ix} - 4ie^{ix} - 1 = 0$$

整理するとこの等式を得ます．

$$e^{ix} = (2 \pm \sqrt{3})i$$

$e^{ix}$  についての2次方程式とみなして解くと，このようになります．

$$\log z = \log |z| + i \arg z$$

複素対数関数はこのように定義されるので、

$$ix = \log\left(2 \pm \sqrt{3}\right) + \left(2n + \frac{1}{2}\right) \pi i$$

先ほどの式の両辺の対数をとることで、

$$x = \left(2n + \frac{1}{2}\right) \pi \pm i \log(2 + \sqrt{3})$$

解が得られます。

$$x = \frac{\pi}{2} \pm i \log(2 + \sqrt{3})$$

特に，複素対数関数の偏角部分を制限した，  
主値について考えると，解はこのようなになります．

# 3. $\sin x = 2$

1. 三角比の定義

2. 三角関数の定義

3. 複素三角関数の定義

4.  $\sin x = 2$ を解く

指数関数や対数関数の複素数への拡張についても、  
ショート動画で取り上げていますので、ぜひ、ご覧ください！

$$4. \left(1/2\right)! = ???$$

4. (1. 階乗の定義  
2. ガンマ関数  
3.  $(1/2)!$ を求める) ???

# 4. $(1/2)! = ???$

1. 階乗の定義
2. ガンマ関数
3.  $(1/2)!$ を求める

このチャプターでは，階乗を拡張していきます。

# 階乗の定義

高校数学では，数学Aの場合の数で，階乗が登場します．

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

$n!$ は、1から $n$ までの整数すべての積であり、

$$0! \Rightarrow 1$$

$0!$ は1と定義されます。

$$n! \quad (n \geq 0)$$

階乗は，非負整数に対してのみ定義されていた．

## 4. $(1/2)! = ???$

## 階乗の定義

<https://ja.wikipedia.org/wiki/ダニエル・ベルヌーイ>

<https://ja.wikipedia.org/wiki/レオンハルト・オイラー>

<https://ja.wikipedia.org/wiki/カール・フリードリヒ・ガウス>

<https://ja.wikipedia.org/wiki/アドリアン＝マリ・ルジャンドル>

<https://ja.wikipedia.org/wiki/カール・ワイエルシュトラス>



階乗を拡張するという試みは，様々な数学者によって検討されてきました．

# ガンマ関数

現代数学では，ガンマ関数による拡張が定着しています．

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$



ガンマ関数は，正の実数に対して定義される，このような関数です．

$$\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A t^{x-1} e^{-t} dt$$

この積分は広義積分であり，極限として与えられます．

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

実は、 $x$ を実部が正である複素数 $z$ にしても、  
広義積分が収束することが分かっており、

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z n!}{n \prod_{k=0}^{n-1} (z + k)}$$

解析接続によって、定義域を複素数全体に拡張すると、  
このような表示が得られます。

$$\Gamma(n + 1) = n!$$

ここで、注意が必要なのは、非負整数 $n$ に対して、  
この等式が成り立つということです。

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}!$$

つまり、 $(1/2)!$ を無理やり定めるには、 $\Gamma(3/2)$ を求める必要があるのです。

# $(1/2)!$ を求める

では、 $(1/2)!$ を、実際に計算していきましょう。

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ -t^z e^{-t} \right]_0^A + z \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \\ &= z\Gamma(z)\end{aligned}$$

部分積分を計算することで、ガンマ関数に関する等式が得られるので、

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

これを用いると， $\Gamma(1/2)$ の値を計算すれば良いことが分かります．

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \\ &\stackrel{x=\sqrt{t}}{=} 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\end{aligned}$$

変数変換を行うと，ガウス積分と呼ばれる積分に帰着します．

$$\left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

ガウス積分の2乗は，直交座標平面上の重積分に変換することができます．

4.  $(1/2)! = ???$

$(1/2)!$ を求める

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r e^{-r^2} dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty r e^{-r^2} dr \\ &= -\frac{1}{2} [\theta]_0^{2\pi} [e^{-r^2}]_0^\infty = \pi\end{aligned}$$

この積分に極座標変換を適用すると，具体的な値が計算できるため，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

ガウス積分の値が求まります。

詳細は，大学数学の微分積分学に任せたいと思います。

$$\frac{1}{2}! = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

よって、 $(1/2)!$ の値を求めることができました。

# 4. $(1/2)! = ???$

1. 階乗の定義
2. ガンマ関数
3.  $(1/2)!$ を求める

ガウス積分についてのショート動画は，今後制作する予定です．

# 5. 内角の和が $180^\circ$ でない三角形

# 5. 内角の和が180でない三角形

1. ユークリッド幾何学
2. 平行線の公理
3. 球面幾何学
4. 双曲幾何学

# 5. 内角の和が $180^\circ$ でない三角形

1. ユークリッド幾何学

2. 平行線の公理

3. 球面幾何学

4. 双曲幾何学

このチャプターでは、幾何学の世界について解説していきます。

# ユークリッド幾何学

まず，算数，中学数学，高校数学で扱われる幾何学は，  
ユークリッド幾何学と呼ばれており，  
2次元や3次元の世界をユークリッド幾何学的に扱う，  
初等幾何学を学習します．

<https://ja.wikipedia.org/wiki/ユークリッド原論>

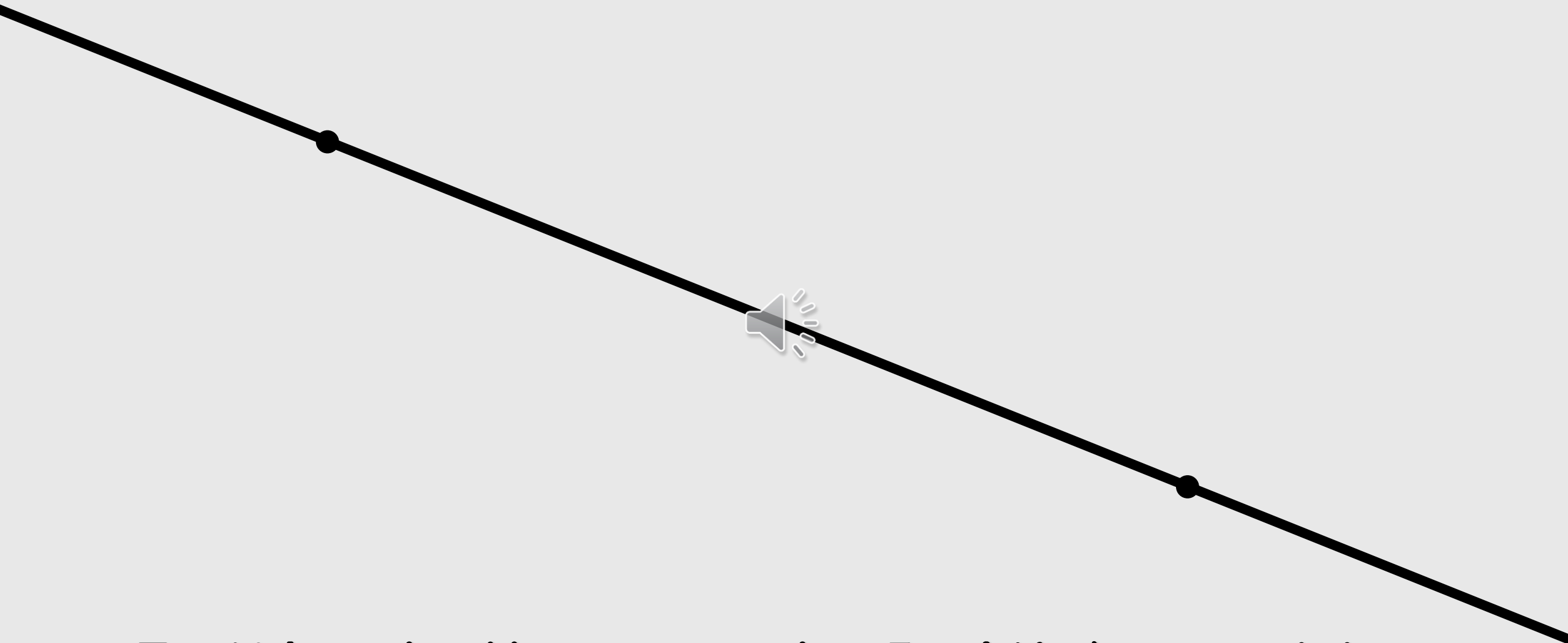


ユークリッド幾何学は、  
ユークリッドの『原論』をきっかけとして普及した幾何学です。

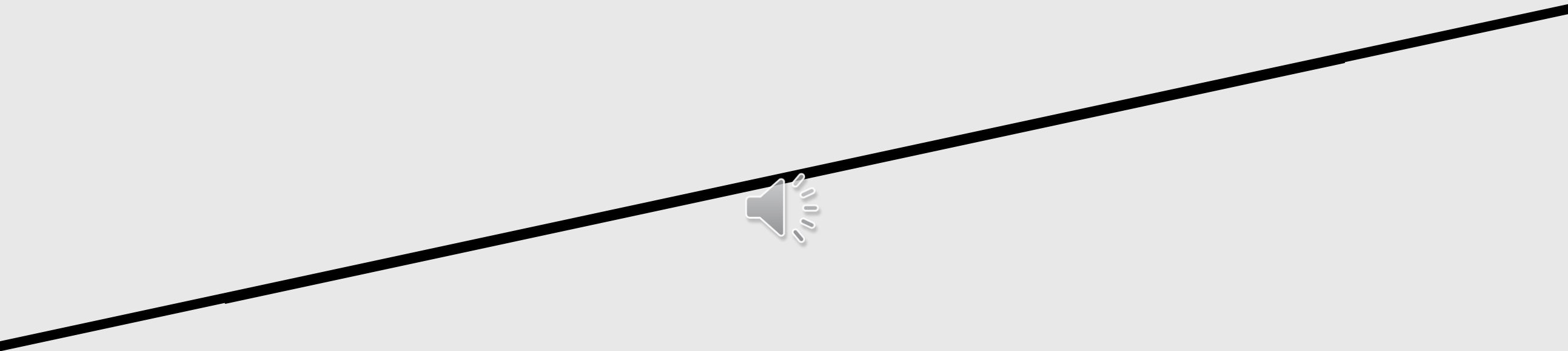
<https://ja.wikipedia.org/wiki/ユークリッド原論>



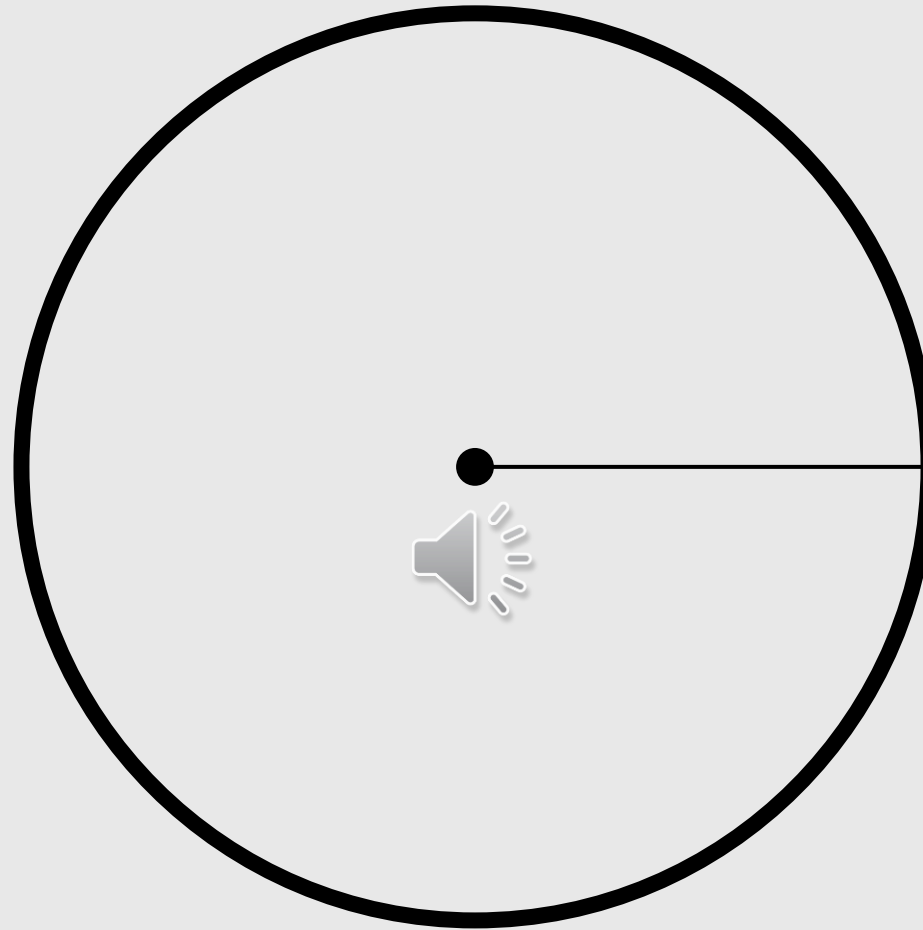
ユークリッド幾何学では、5つの公準を示すところから始まります。  
つまり、これら5つの命題は成り立つものとして認め、  
議論を進めていくということです。



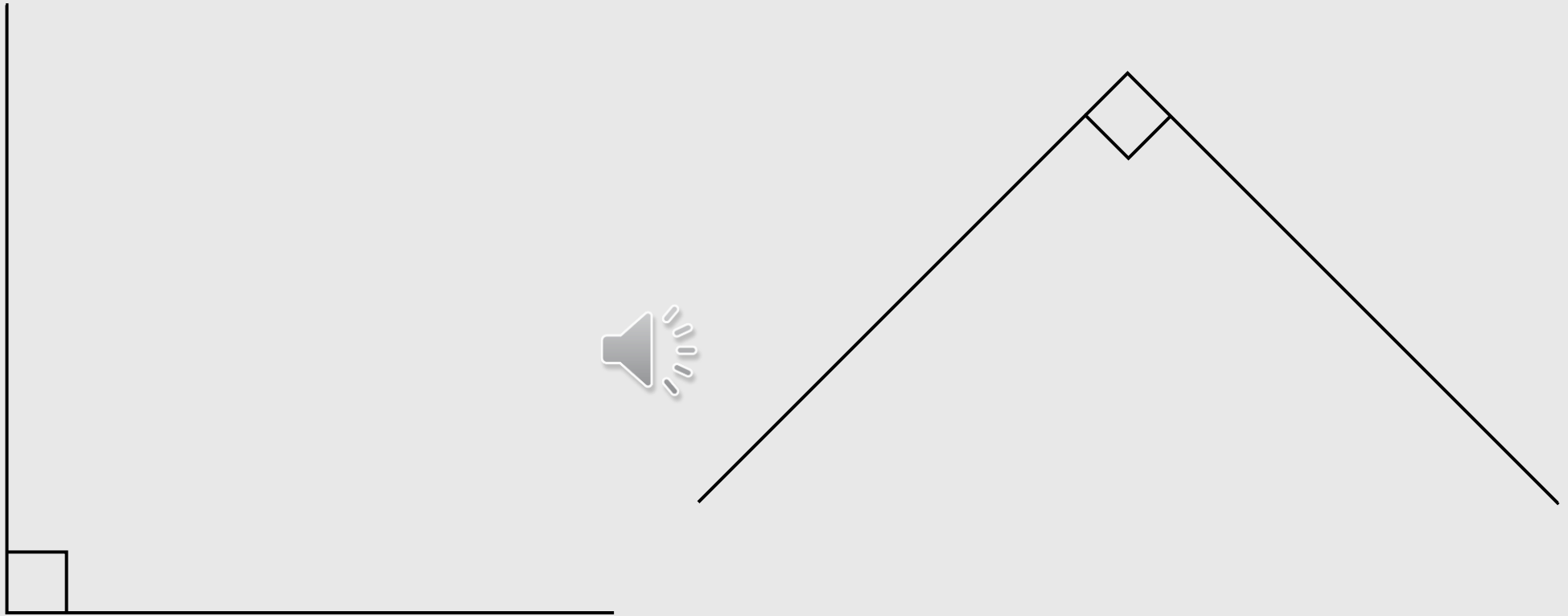
1つ目，任意の2点に対して，その2点を通る直線がただ一つ存在する．



2つ目，任意の線分に対して，その線分を含む直線が存在する．



3つ目，任意の点と任意の正の実数 $r$ に対して，  
その点を中心とし，半径を $r$ とする円が存在する．



4つ目，任意の直角の大きさは，互いに等しい．



5つ目，直線が2直線と交わるとき，その交点で直線と直線がなす，  
同じ側の内角の和が2直角より小さいならば，そちら側で2直線は交わる．

# 平行線の公理

最後の公準は，平行線の公理と呼ばれており，  
様々な論争を巻き起こしました。

# ピタゴラスの定理

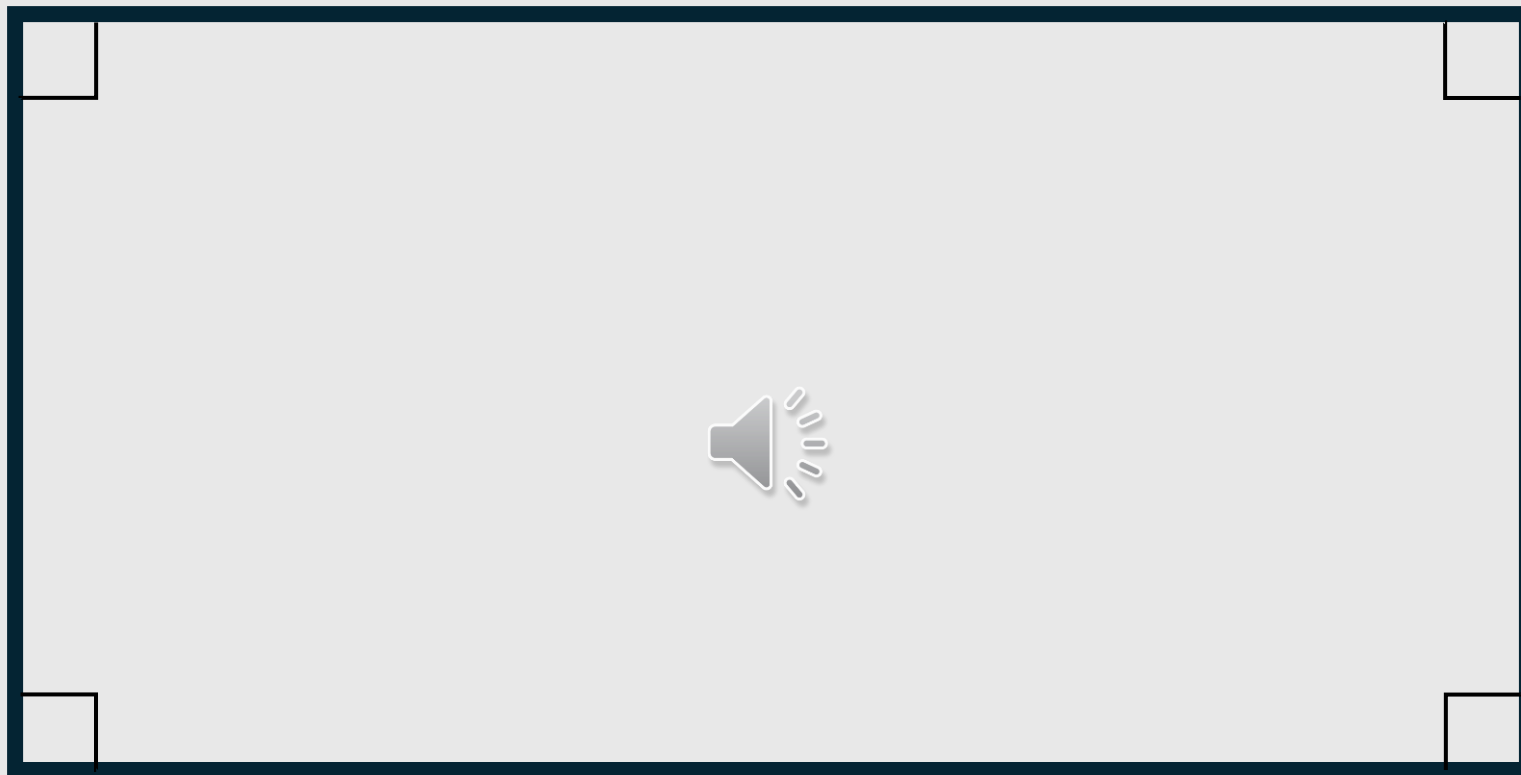
## ウォリスの公理

### プロクロスの公理

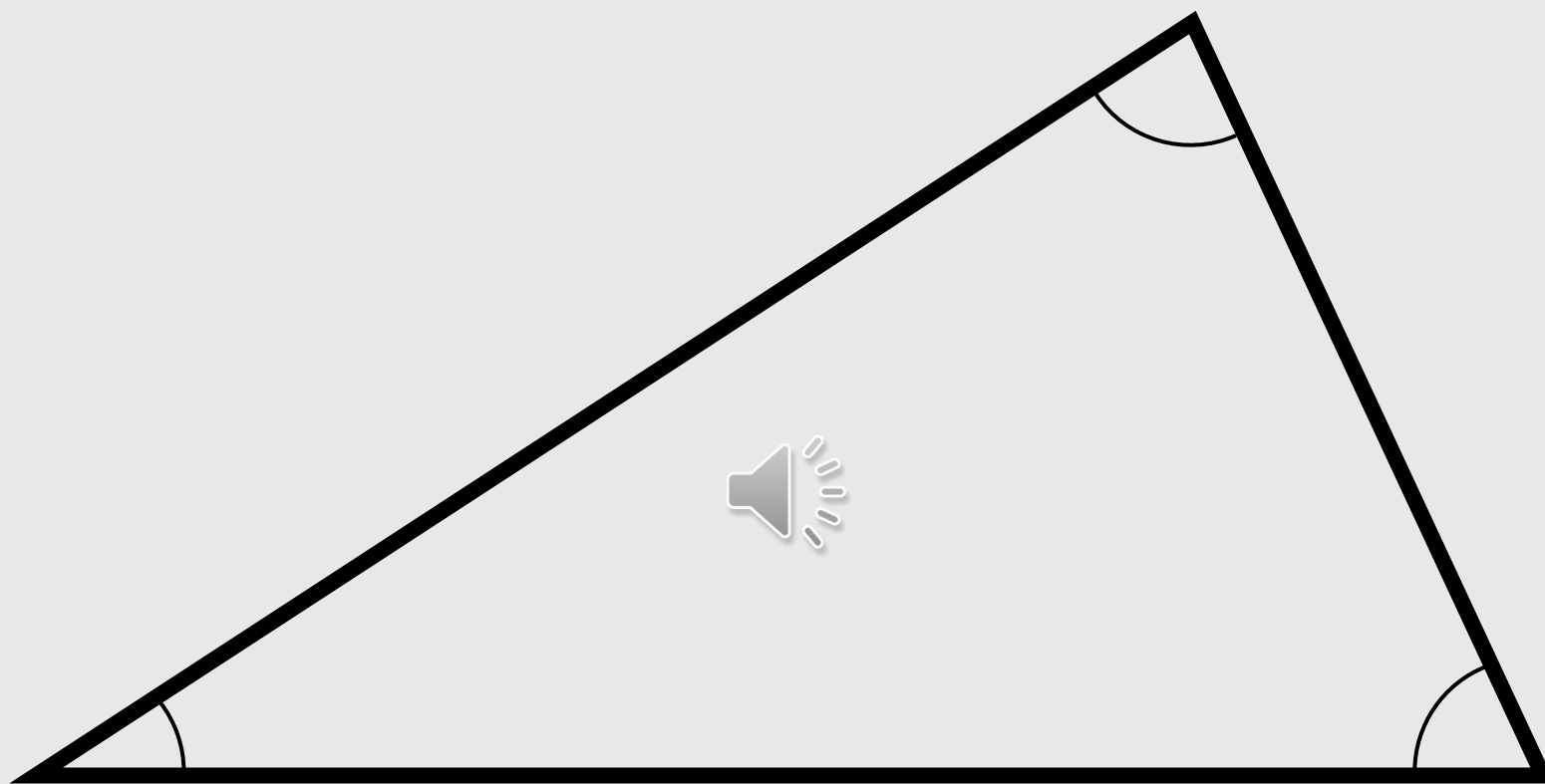
その論争の過程で、平行線の公理と同値な命題が、  
いくつか知られるようになりました。



例えば、任意の直線と、その直線上にない任意の点に対して、  
その点を通る与えられた直線に平行な直線は、  
高々1つしか存在しないことや、



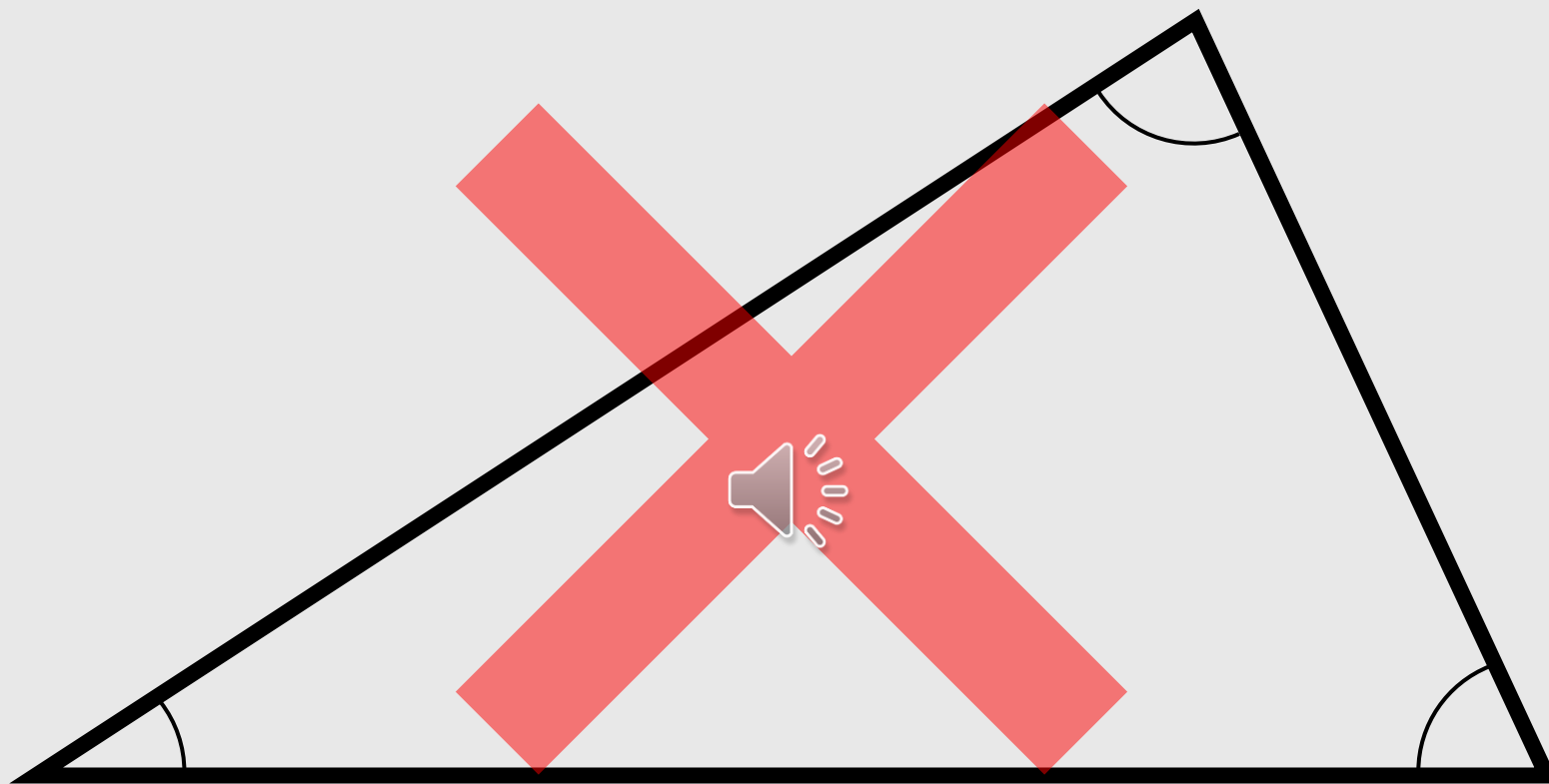
すべての角が直角である四角形が存在すること、



そして、今回のテーマである、  
三角形の内角の和が $180^\circ$ であることなどです。

# 非ユークリッド幾何学

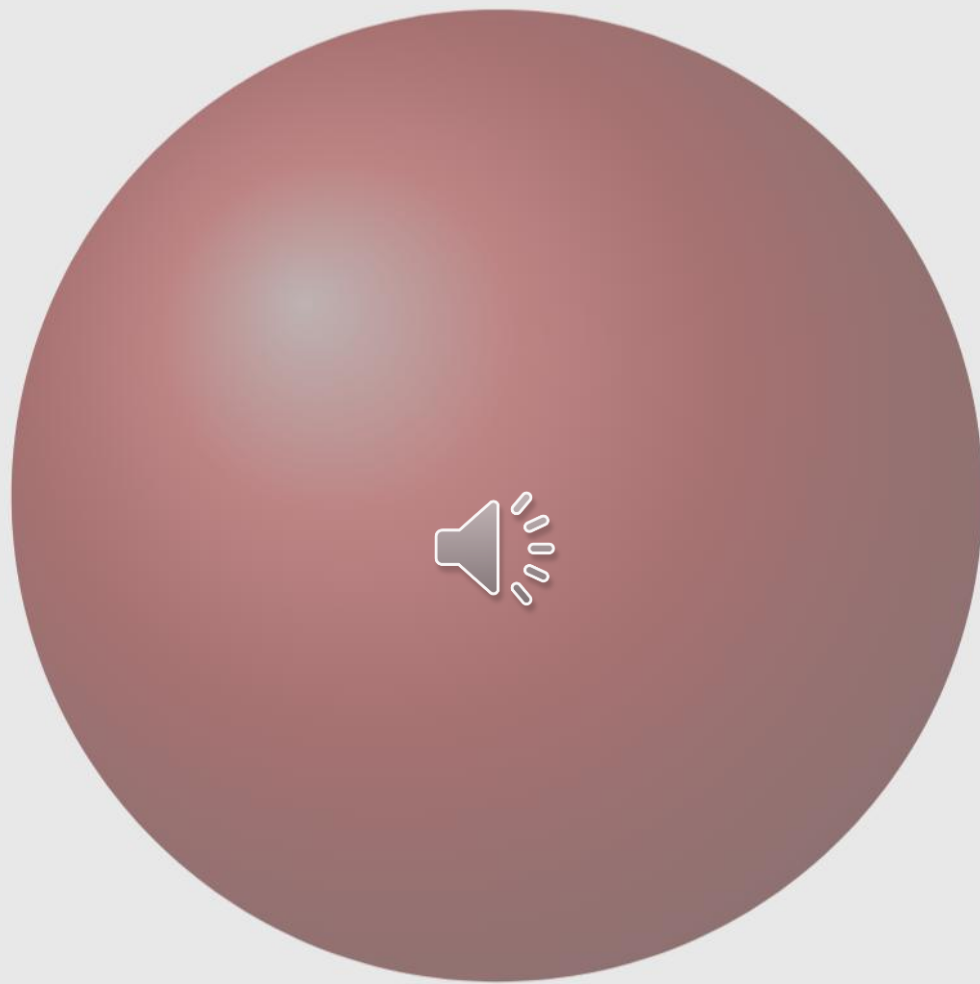
平行線の公理が，他の4つの公準から導くことのできない，  
独立した命題であることが判明した現在では，  
平行線の公理を満たさない幾何学を，  
非ユークリッド幾何学と呼んで区別しています。



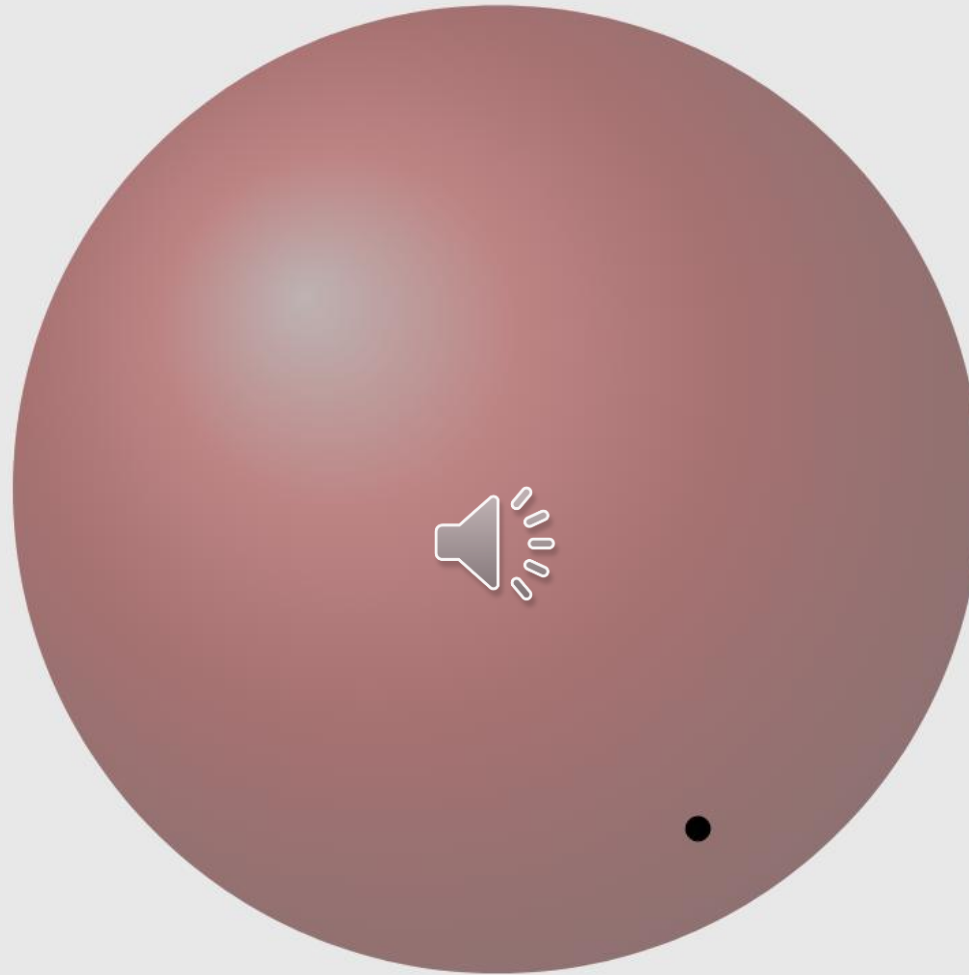
つまり，非ユークリッド幾何学では，  
三角形の内角の和は， $180^\circ$  になるとは限らないのです．

# 球面幾何学

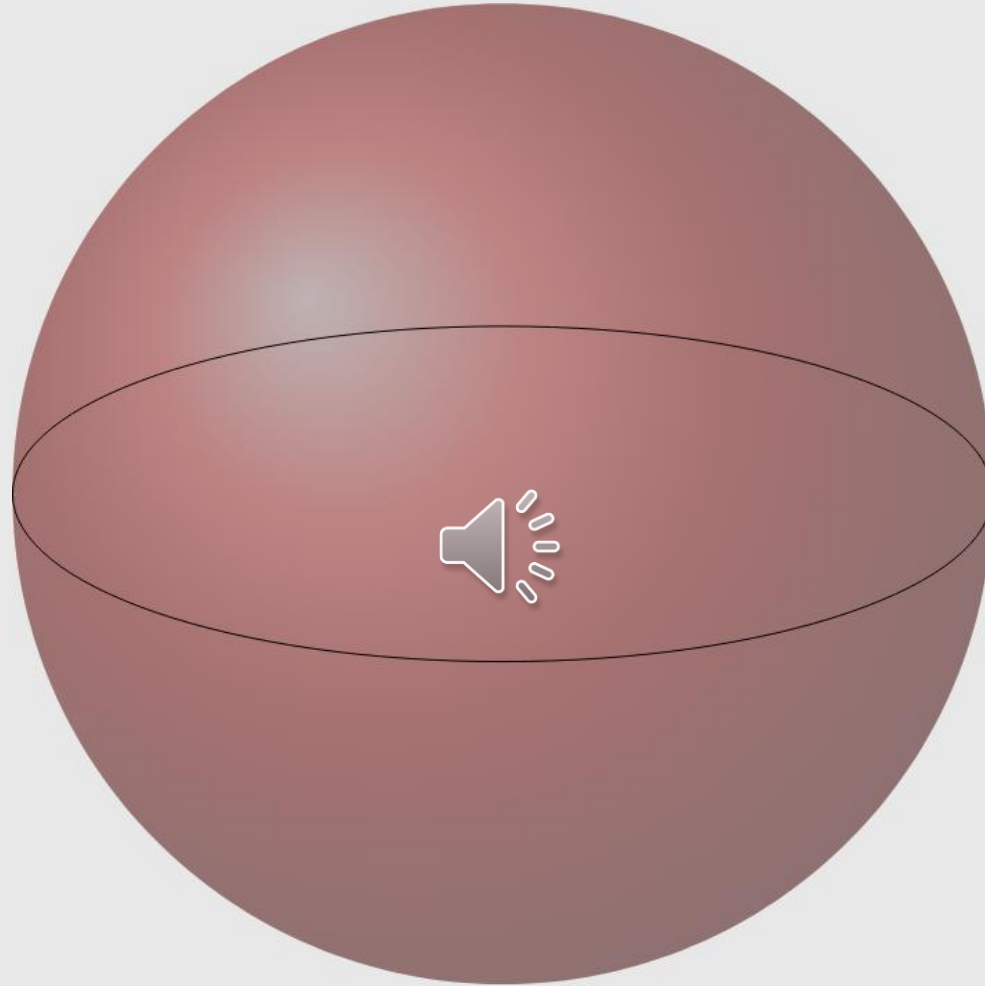
非ユークリッド幾何学の1つ，球面幾何学について見ていきましょう．



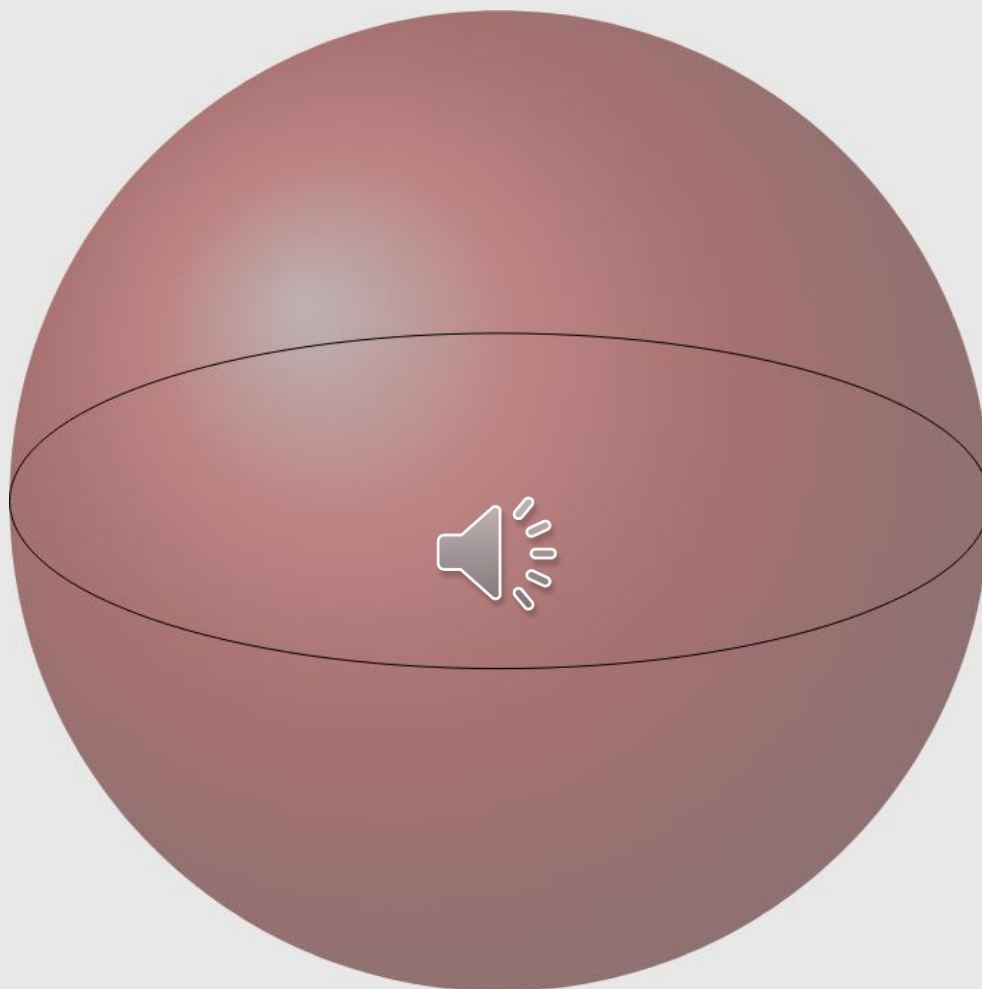
球面幾何学では，文字通り，球面上の幾何学を考えます．



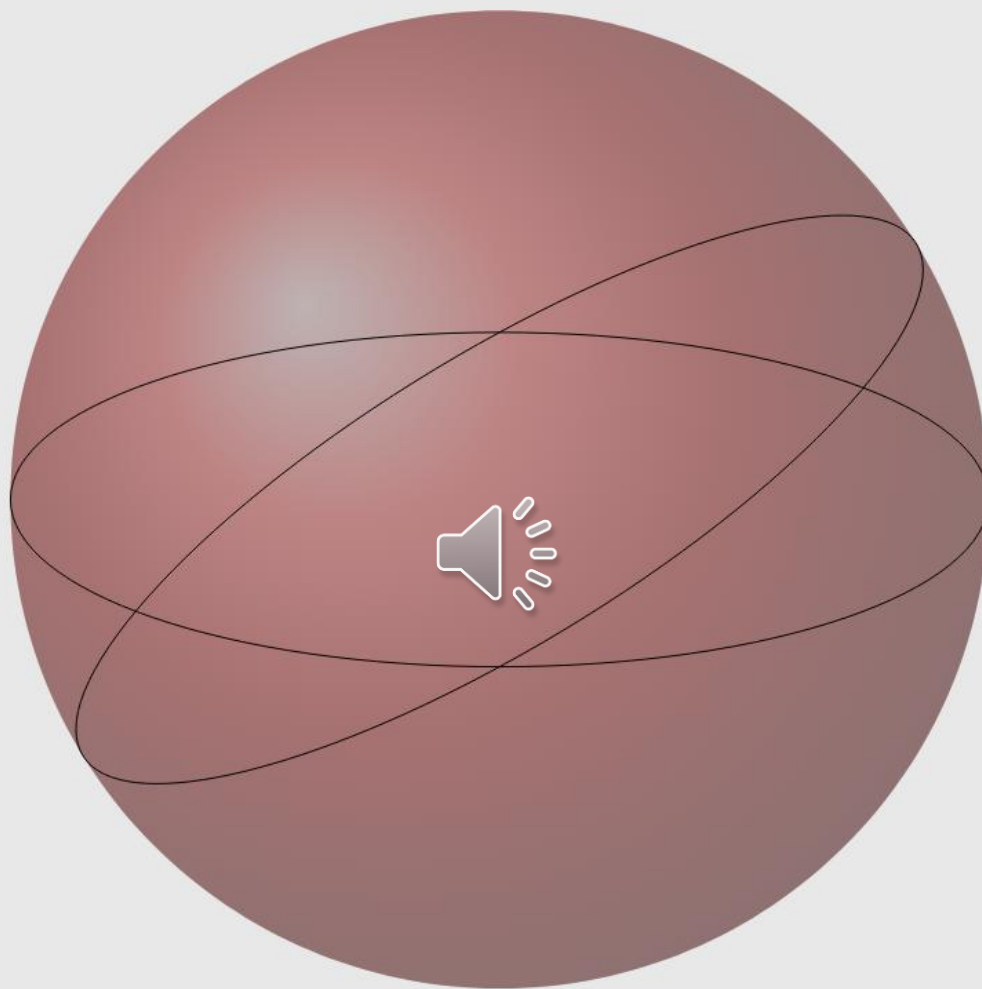
球面上の点を点と呼び、



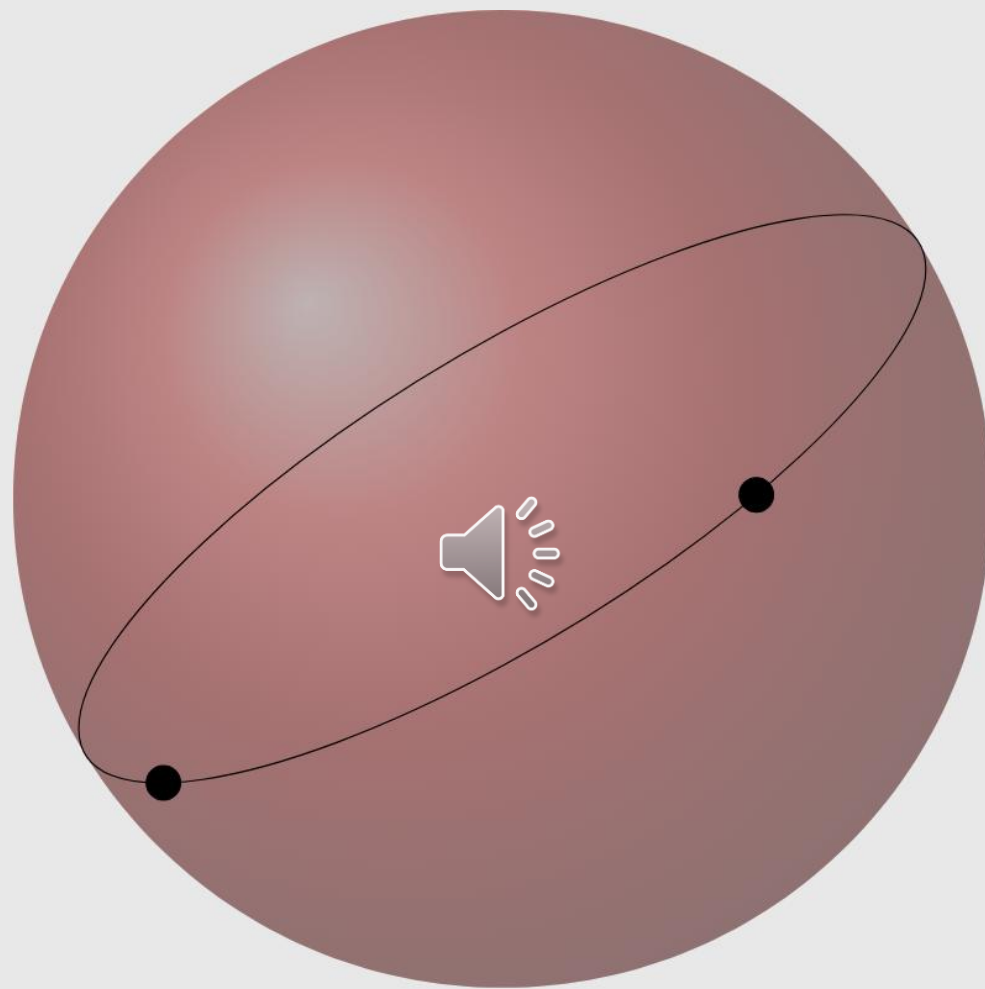
球面上の大円を直線と呼びます。



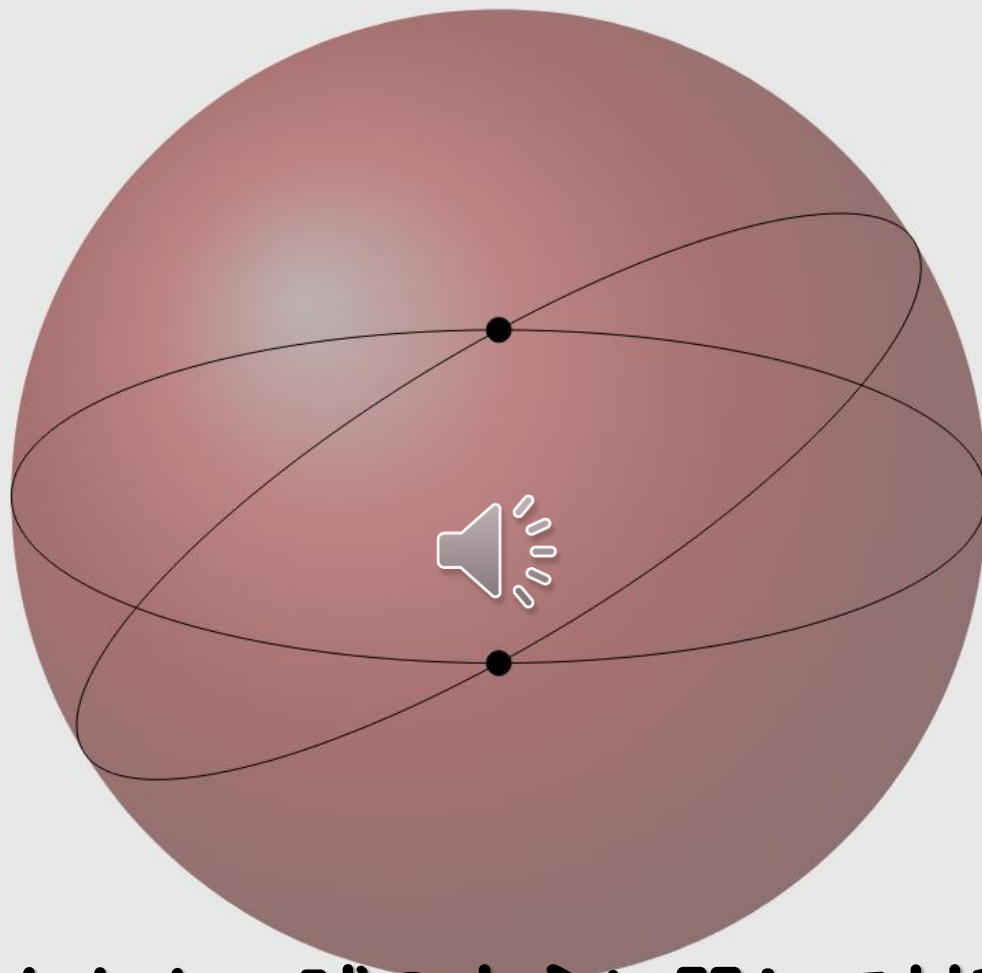
大円とは，球の中心を通る平面と球面の交線，すなわち球の中心を中心とする，球面上の円のことです．



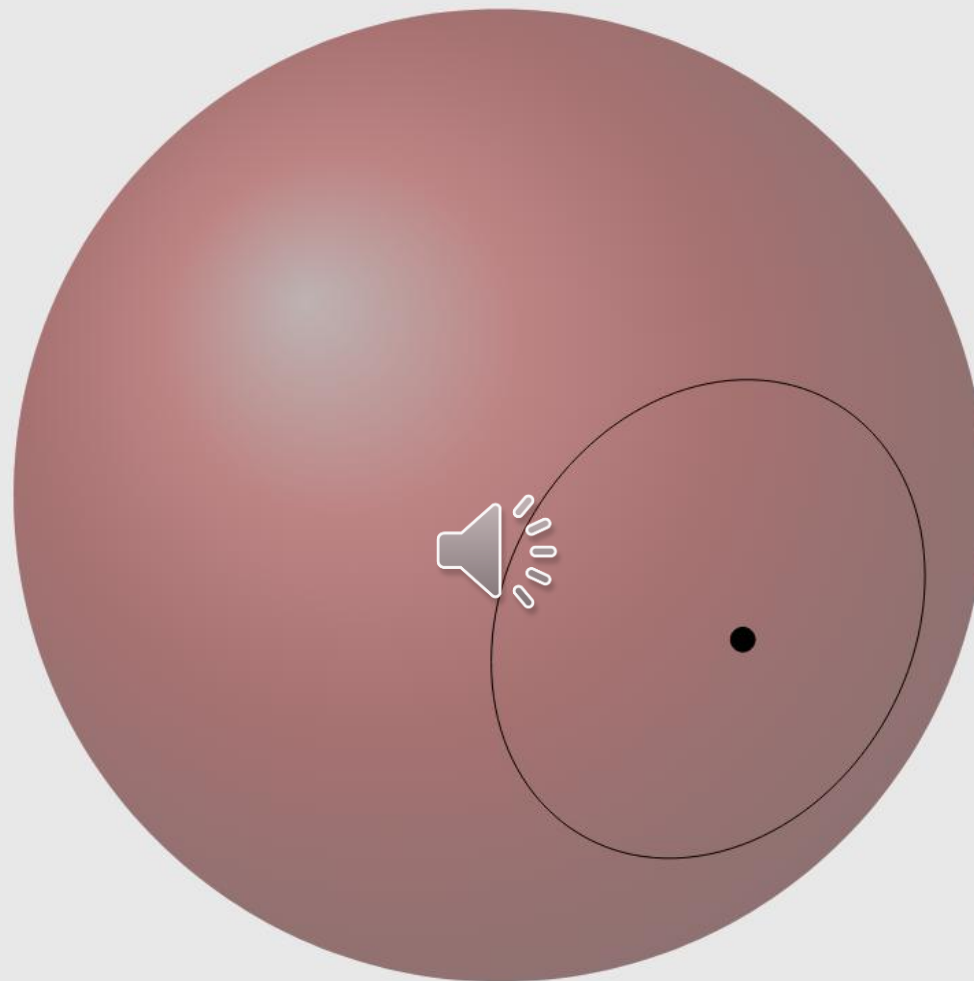
そして、2つの大円が交わる角を、2直線の角と呼びます。



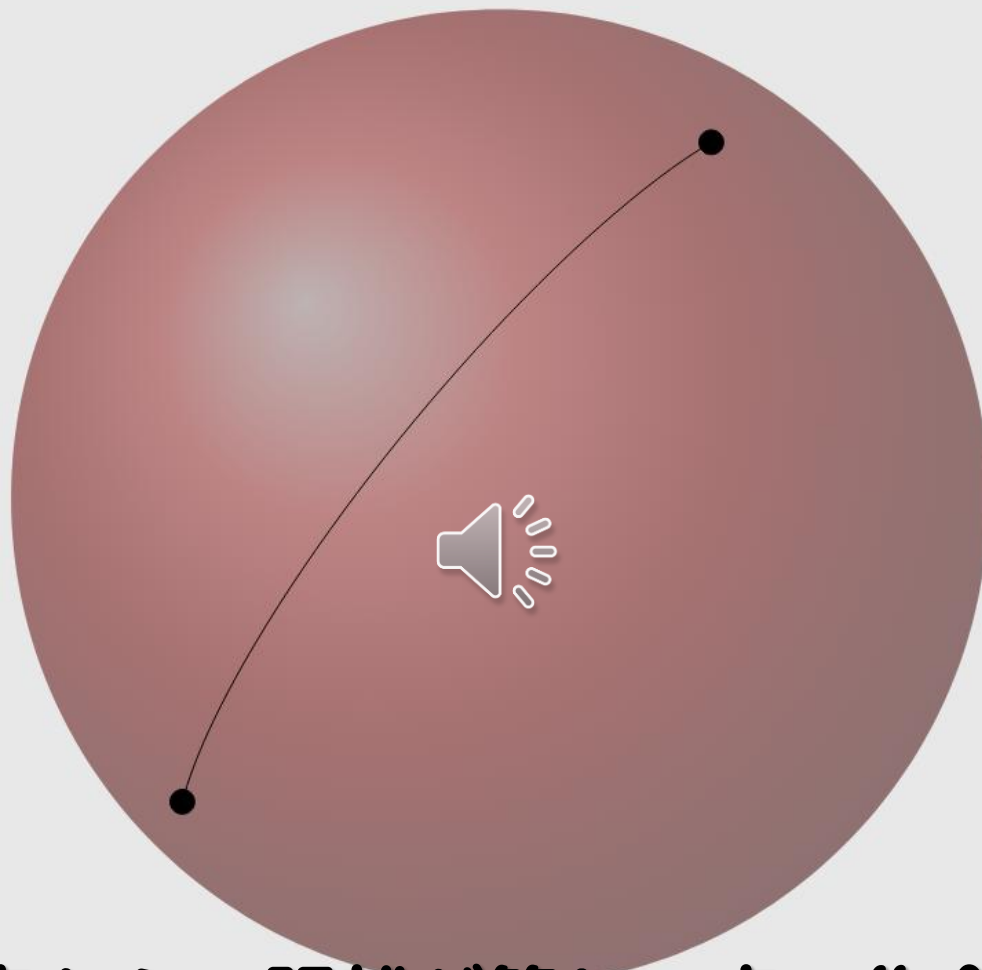
球面幾何学では，2点を通る直線が存在します．



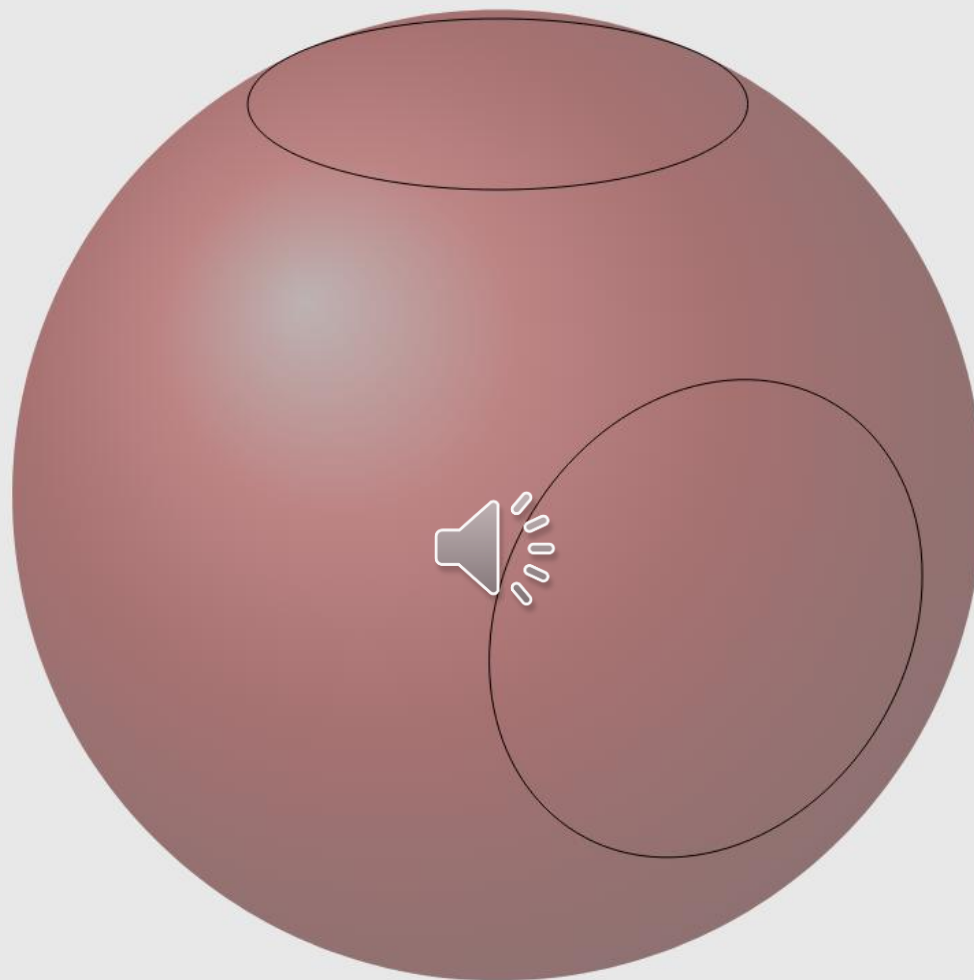
その2点が対蹠点，すなわち，球の中心に関して対称な位置にない限り，  
直線は一意に定まります。



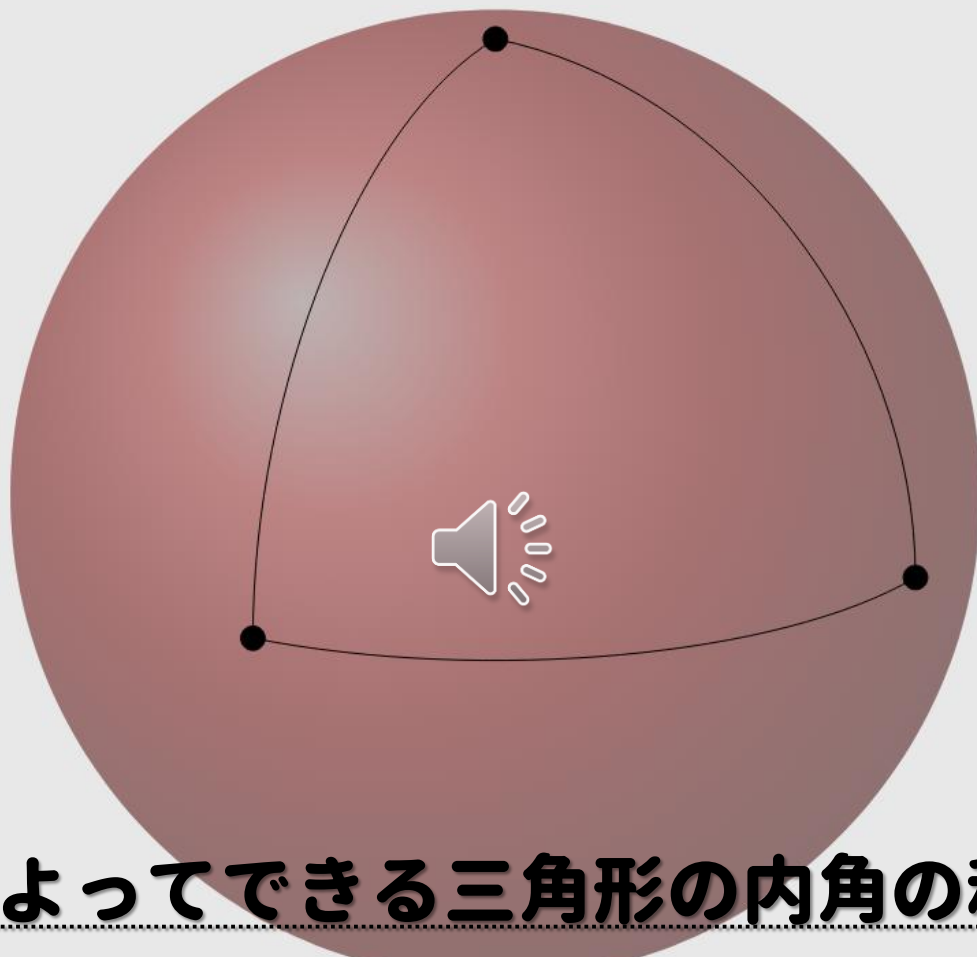
また，1点を中心とする，任意の半径の円が存在します．



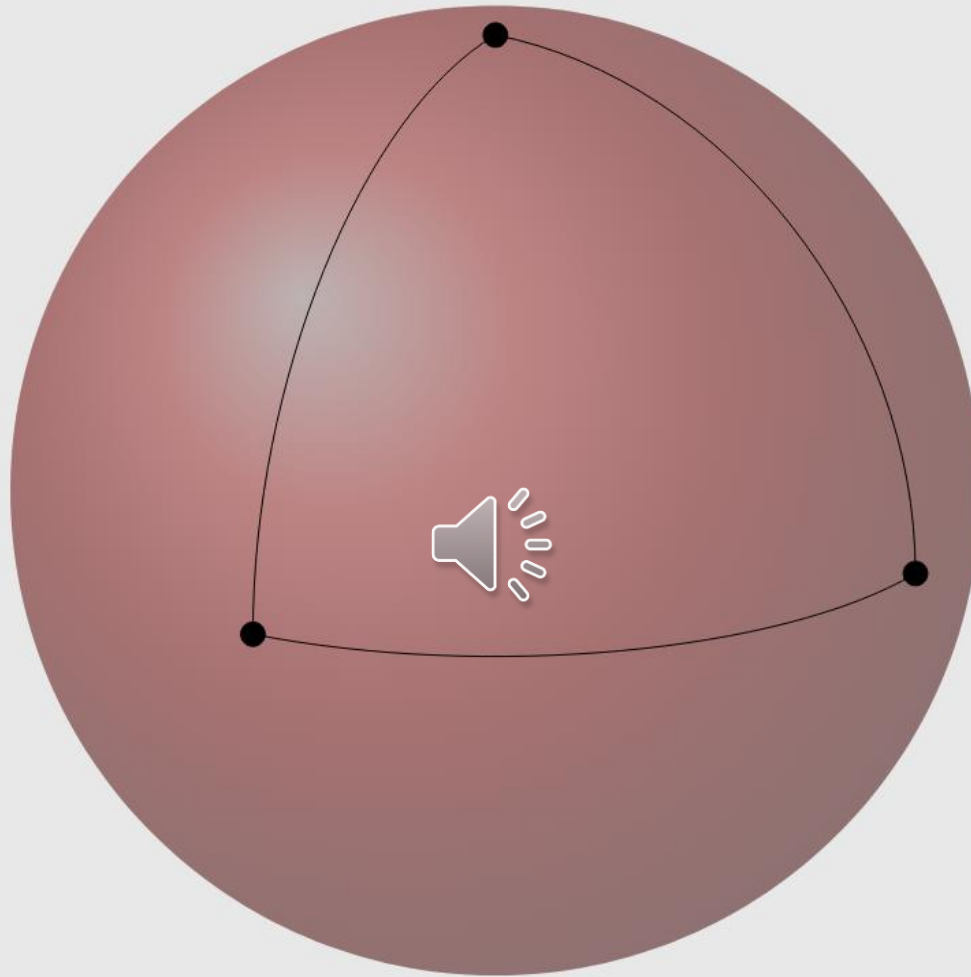
円は，1点からの距離が等しい点の集合ですが，  
球面幾何学上の2点の距離は，大円の劣弧の長さとして定義されます．



そして，球面幾何学では，平行線公準が成り立ちません．



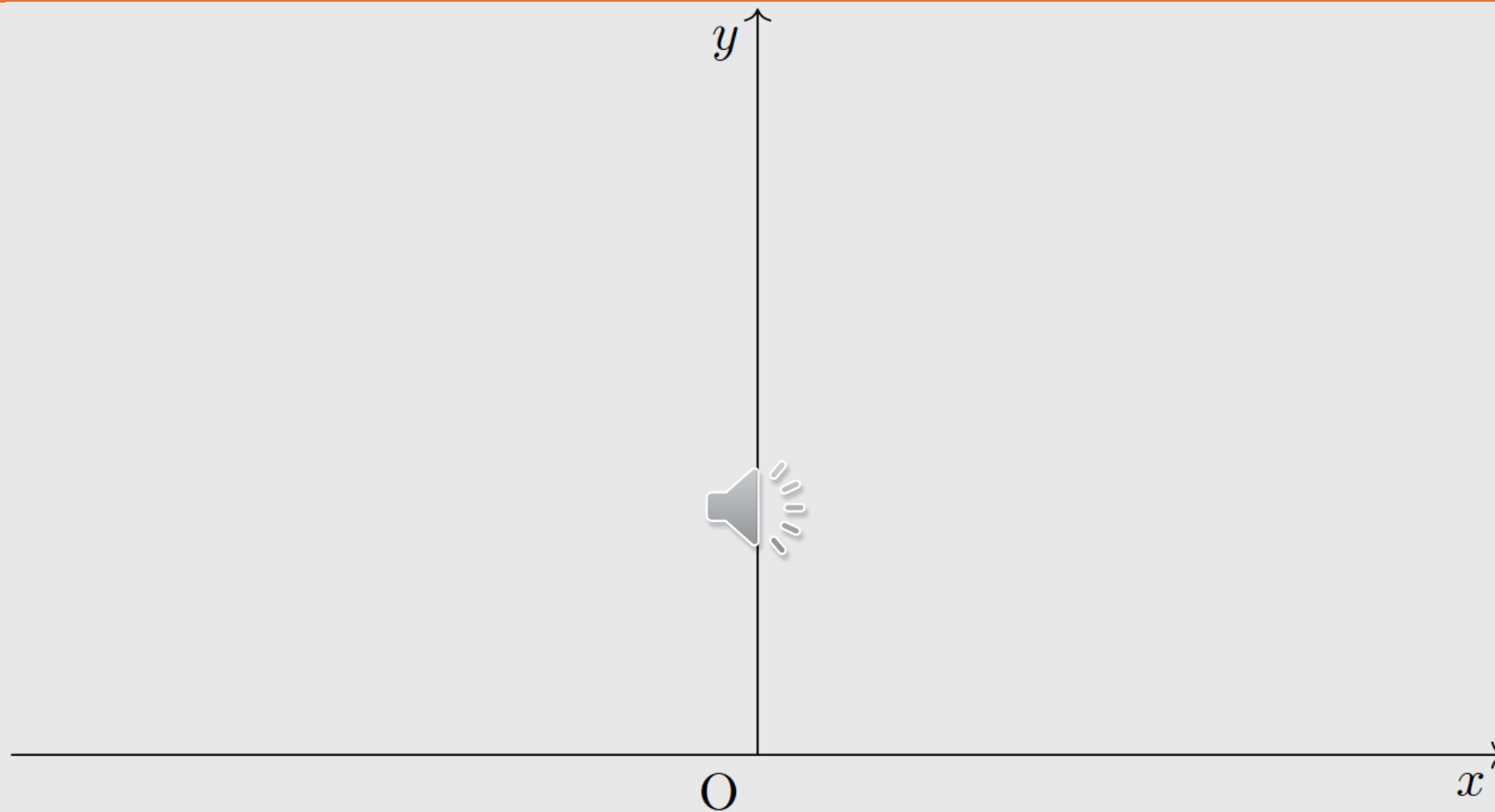
3点によってできる三角形の内角の和は、  
各辺を大円の劣弧により定めると、  
 $180^\circ$ より大きく $540^\circ$ より小さくなります。



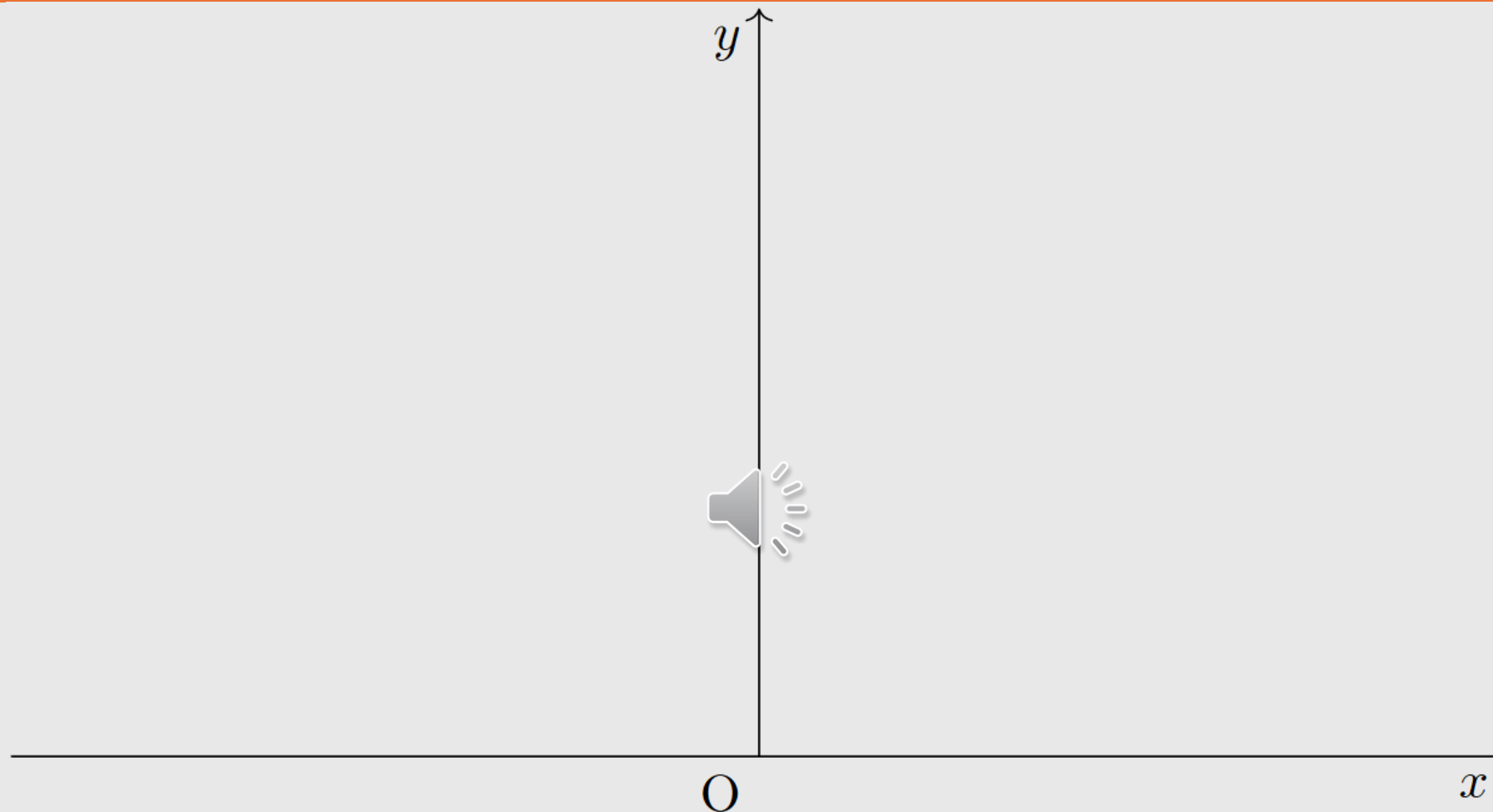
例えば，この三角形の内角の和は， $270^\circ$ になります．

# 双曲幾何学

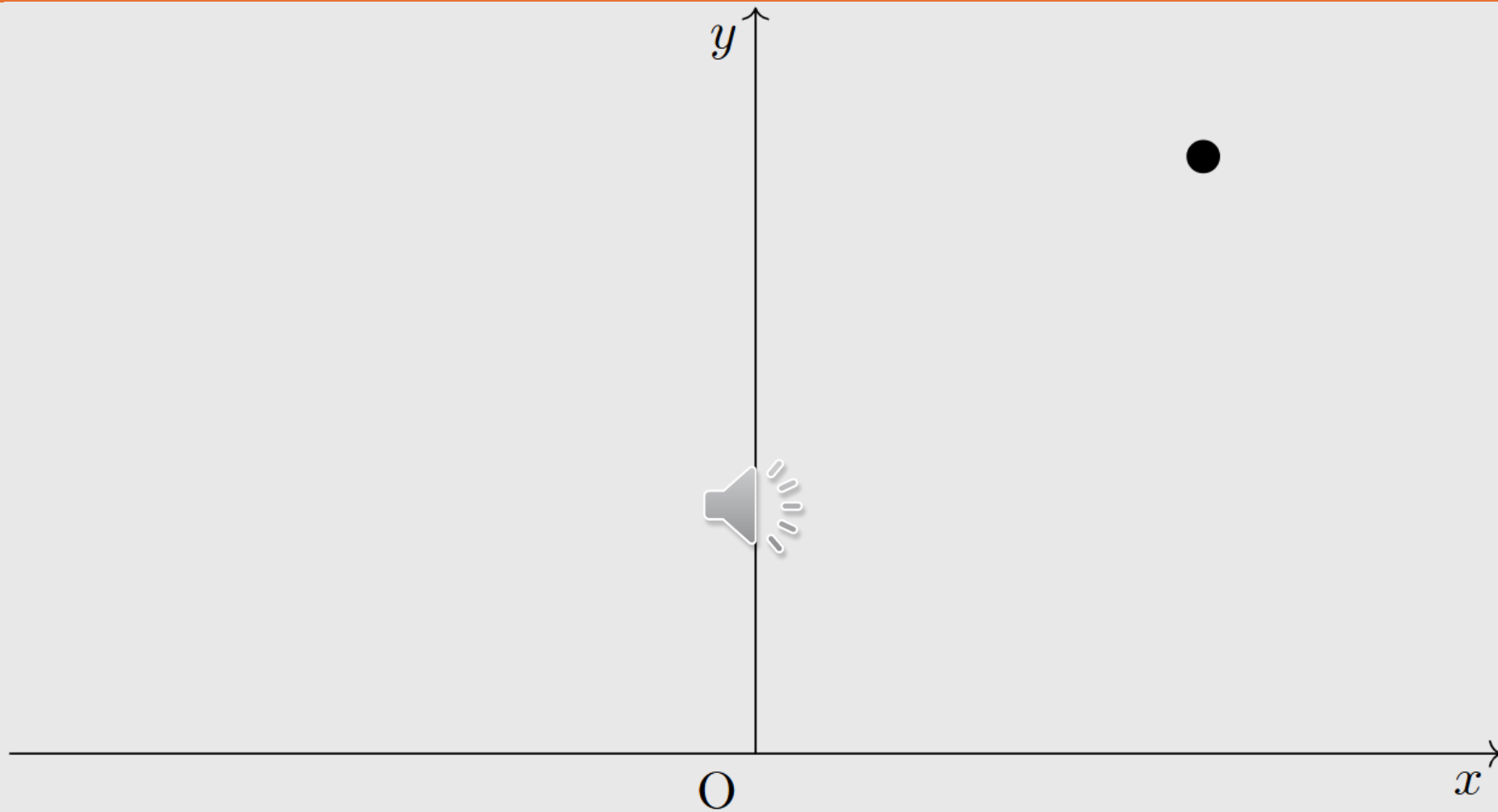
次に，双曲幾何学について見ていきましょう．



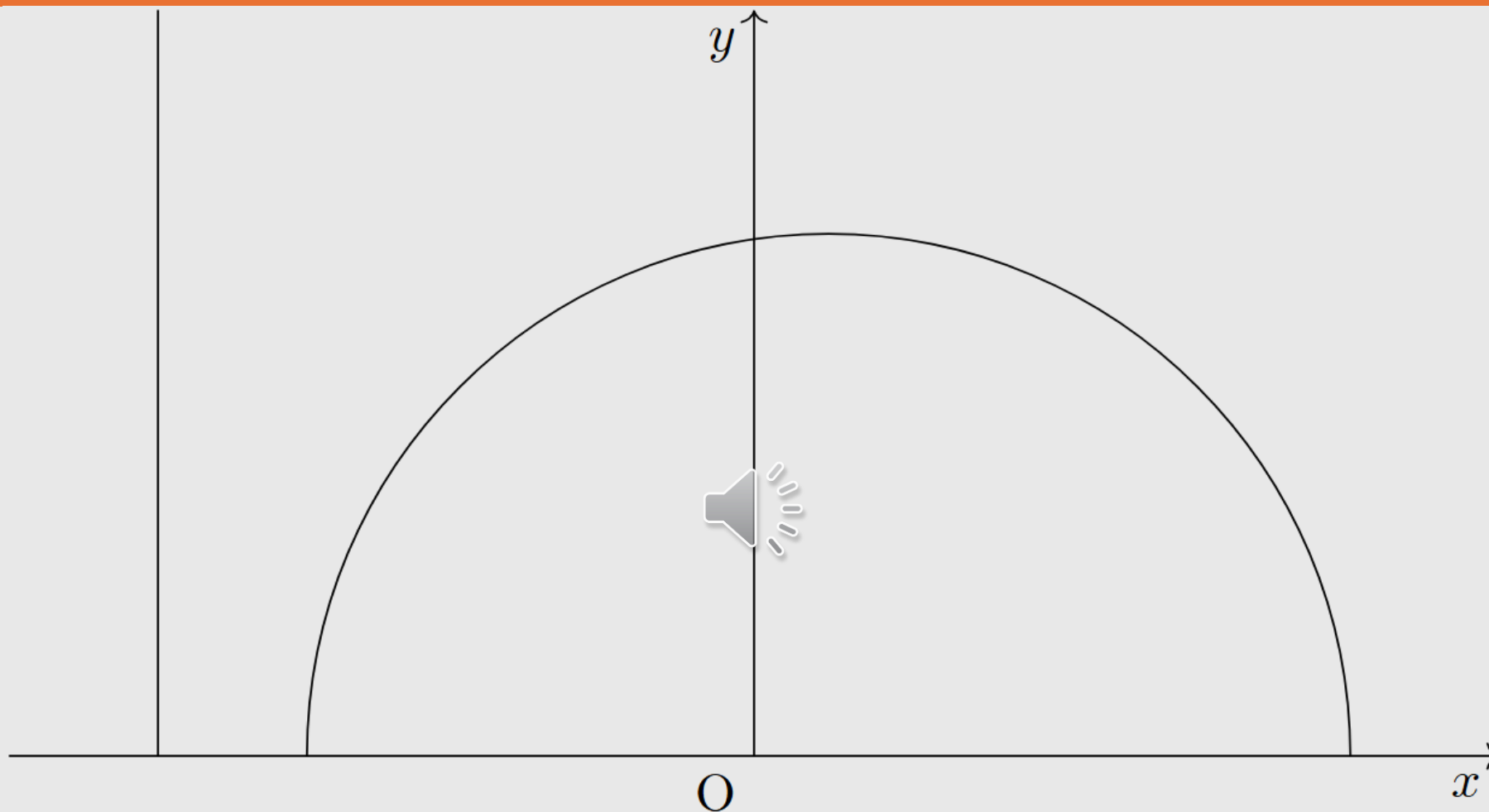
双曲幾何学のモデルとして，ポアンカレの上半平面やポアンカレの円板が有名ですが，ここでは上半平面のモデルで話を進めたいと思います．



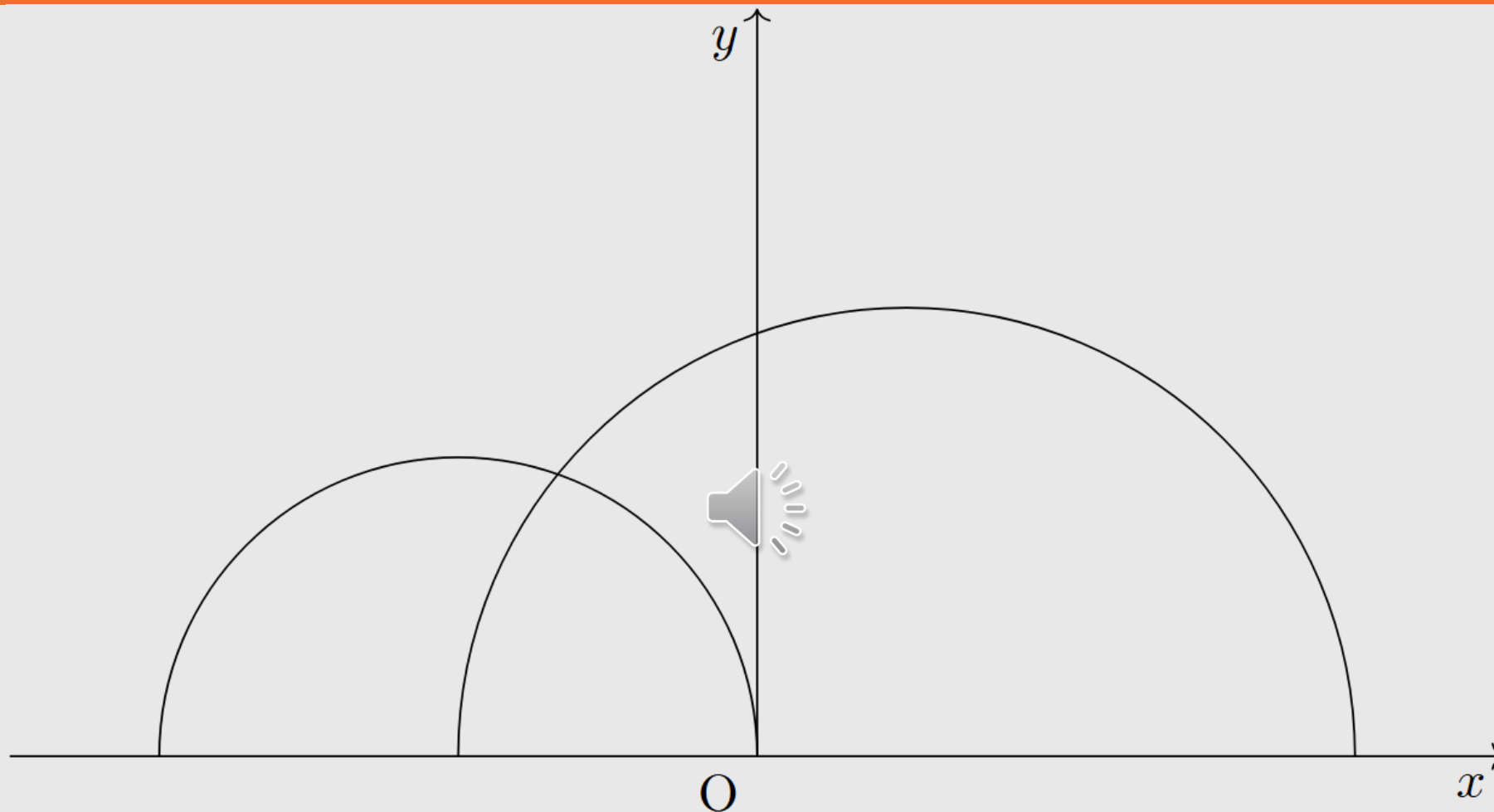
上半平面は， $y$ 座標が0より大きい，座標平面の上半分のことを指します．



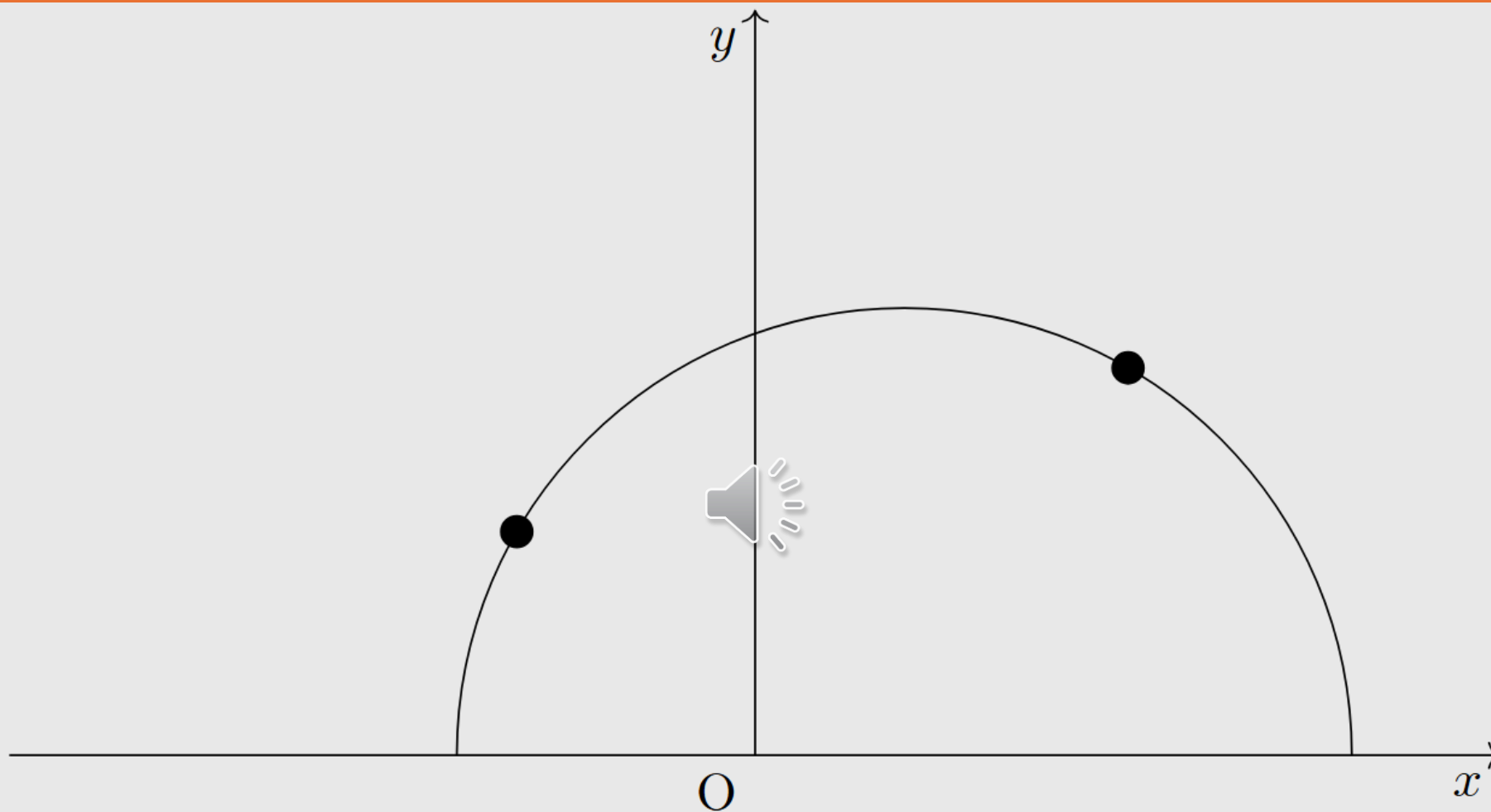
上半平面上の点を点と呼び、



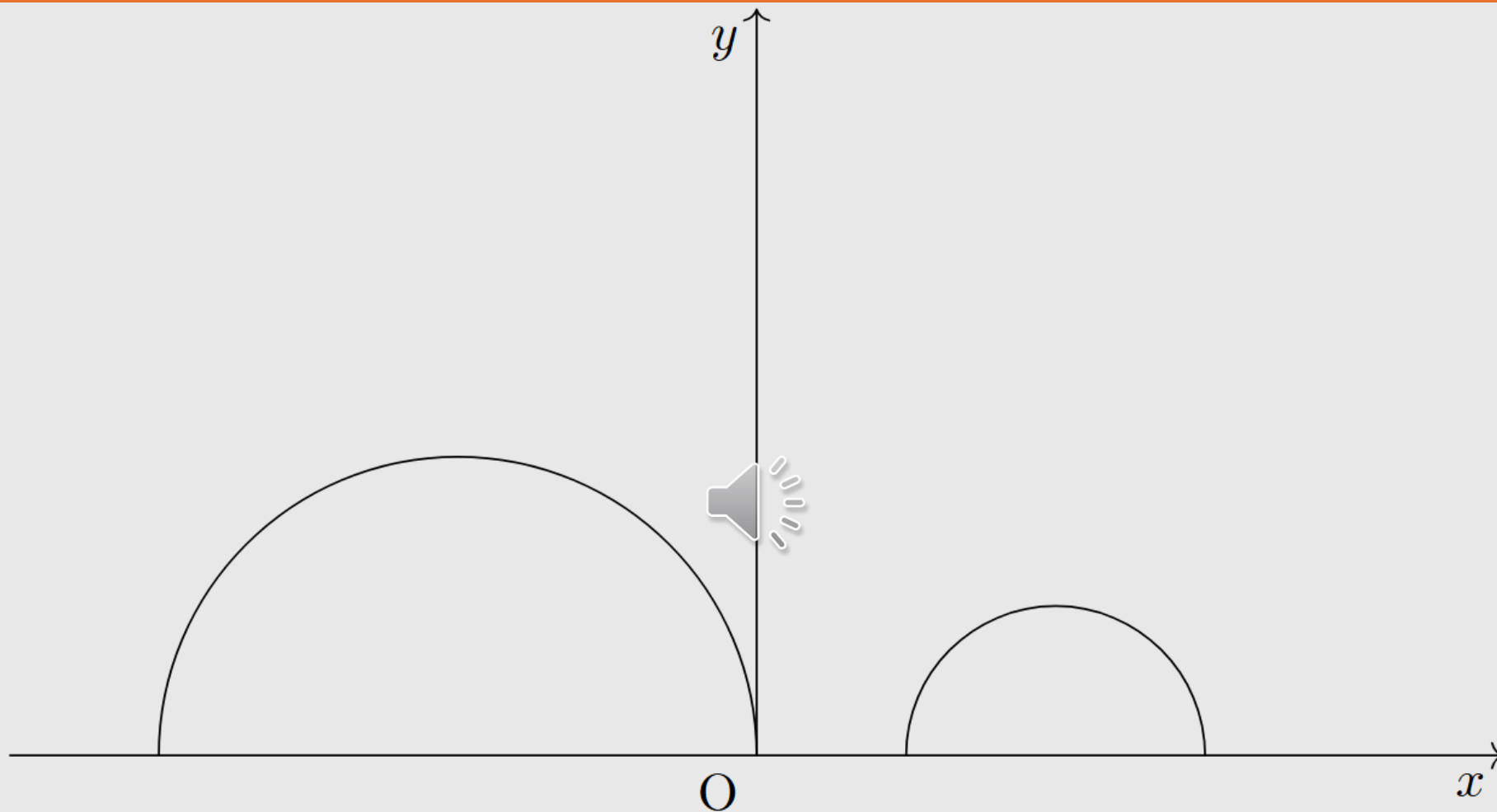
$x$ 軸に垂直な直線と， $x$ 軸上の点を中心とする半円を直線と呼びます．



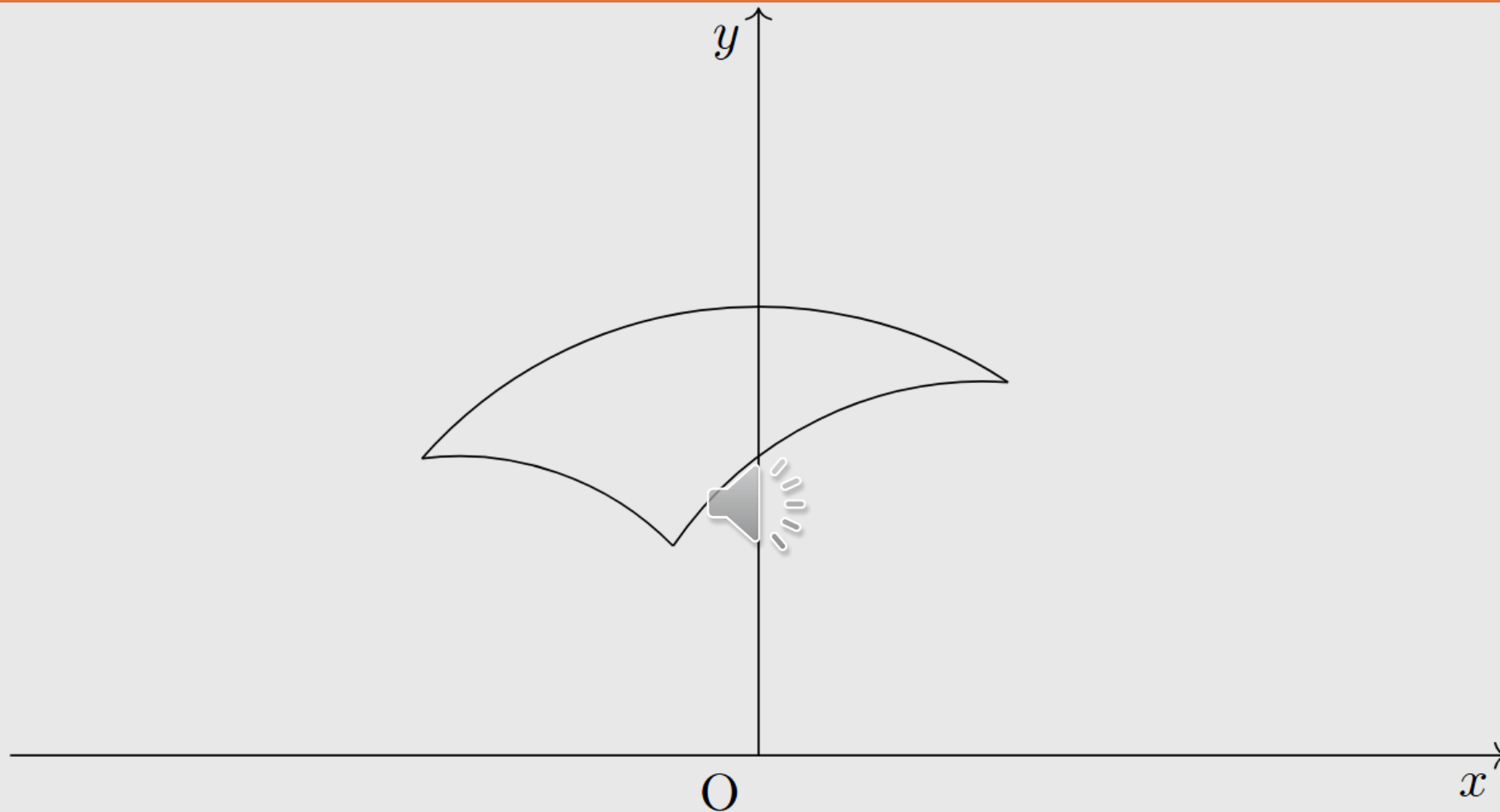
そして、2つの上半平面の直線が交わる角を、2直線の角と呼びます。



双曲幾何学では，2点を通る直線が存在します．



**双曲幾何学も非ユークリッド幾何学であり、  
平行線の公理が成り立ちません。**



3点によってできる三角形の内角の和は， $180^\circ$ より小さくなります．

# 5. 内角の和が $180^\circ$ でない三角形

1. ユークリッド幾何学

2. 平行線の公理

3. 球面幾何学

4. 双曲幾何学

三角形の内角の和は，球面幾何学では $180^\circ$ より大きくなり，  
双曲幾何学では $180^\circ$ より小さくなります。

# 6. 素因数分解の仕方が複素数ある世界

# 6. 素因数分解の仕方がある世界

1. 素因数分解の一意性
2. 環とイデアル
3. 素因数分解の一意性がある世界
4. 素因数分解の一意性の証明

# 6. 素因数分解の仕方が複数ある世界

1. 素因数分解の一意性

2. 環とイデアル

3. 一意分解整域

4. 素因数分解の一意性の証明

最後に，整数の世界の特性について掘り下げていきます．

# 素因数分解の一意性

素因数分解は，現在の学習指導要領では，中学1年生の数学で扱われます．

2, 3, 5, 7,  11, 13, ...

正の約数が1と自身のみである正の整数を，素数といいます。

ただし，1は素数ではありません。

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$

$$= 1 \times 2 \times 3 \times 5$$

$$= 1 \times 1 \times 2 \times 3 \times 5$$

$$= \dots$$

1を素数に含めない理由として，素因数分解の一意性が挙げられます．

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_m^{a_m}$$

2以上の正の整数は，素数の積にただ1通りに分解することができます．

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_m^{a_m}$$

これを素因数分解の一意性といい、整数論の基本定理とも呼ばれています。

# ベズーの補題 ユークリッドの補題

その証明は意外と難しく，いくつかの補題を用いることになります．

# 環とイデアル

この素因数分解の一意性について，環論の視点で考えてみましょう．

$$a + b \in R$$

$$a \times b = a \cdot b = ab \in R$$

整数のように，加法と乗法が定義されていて，

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$(ab)c \neq a(bc)$$

$$a + b = b + a$$

加法・乗法の結合法則，加法の交換法則が成り立ち，

$$a + 0 = 0 + a = a$$

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

足しても足されても変わらない要素<sub>0</sub>や、  
掛けても掛けられても変わらない要素<sub>1</sub>が存在し、

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

どんな要素に対しても、足して0になるような要素が存在し、

$$a(b + c) = ab + ac$$
$$(a + b)c \stackrel{\text{スピーカー}}{=} ac + bc$$

分配法則が成り立つ集合  $R$  を，環といいます．



整数は環なので，整数環とも呼ばれています．

$$ab \rightleftharpoons ba$$

特に，整数環は乗法の交換法則が成り立ちます。  
このような環を可換環といいます。

$$x + y \in I$$

$$0 \in I$$

$$-x \in I \quad (x \in I)$$

環 $R$ の部分集合 $I$ であって、これらの性質を満たし、

$$r \in R, \quad x \in I$$



$$rx \in I$$

$R$ の要素と  $I$ の要素の任意の積が  $I$ の要素になるものを,  
 $R$ のイデアルといいます.

$$2\mathbb{Z} = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

例えば，偶数全体の集合は整数のイデアルになります．

$$2\mathbb{Z} = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

偶数全体の集合は，2の倍数全体の集合です．

$$\{ra \mid r \in R\}$$

このように、環のある要素 $a$ の倍数全体の集合はイデアルになり、これを $a$ で生成される単項イデアルといいます。

$$(a) = \{ra \mid r \in R\}$$

可換環において， $a$ で生成される単項イデアルは，このように表します．

$$(2m + 1)(2n + 1) = 2(2mn + m + n) + 1$$

また、偶数でない整数どうしの積、  
すなわち奇数どうしの積は奇数になります。

$$a, b \notin I \implies ab \notin I$$

このように，全体の環と一致しないイデアルであって，  
イデアルに入っていない要素どうしの積もイデアルの要素でないとき，  
このイデアルを素イデアルといいます。

$p$  が素元  $\overset{\text{def}}{\iff} (p)$  が素イデアル

0でない要素  $p$  で生成される単項イデアルが素イデアルになるとき、  
 $p$  を素元といいます。

$(p) = p\mathbb{Z}$  は  $\mathbb{Z}$  の素イデアル

実は，素数は整数環における素元になります．

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1$$

環の要素のうち，掛けて1になるような要素が存在するものを，  
単元といいます。

$$1 \cdot 1 = 1$$

例えば，1と1の積は1になるので，1は単元になります．

整数の単元は $\pm 1$ のみです．

$p$  が素元  $\overset{\text{def}}{\iff} p \neq ab$   
( $p, a, b$  は単元でない)

0でも単元でもない環の要素のうち，

単元でない要素の積で表すことができないものを，既約元といいます．

$p \in \mathbb{Z}$  が素数  $\implies$   $p$  は  $\mathbb{Z}$  の既約元

素数が整数環における既約元であることは、定義からすぐに分かります。

素数  $\implies \mathbb{Z}$  の素元  $\iff \mathbb{Z}$  の既約元

つまり，素数を環の世界に一般化したものとして，素元と既約元があり，  
整数環では，素元と既約元は一致するのです。

# 一意分解整域

方程式を解くとき，因数分解は有効な手法です．

$$ab = 0 \iff a \neq 0 \text{ または } b = 0$$

これは、 $a$ と $b$ の積が0になるのであれば、  
 $a$ と $b$ の少なくとも一方が0になるからです。

$$ab = 0 \iff a \neq 0 \text{ または } b = 0$$

このような性質は，すべての環が持っているわけではありません．

この性質を持つ可換環を，整域といいます．

素元  $\overset{\circ}{\rightleftharpoons}$  既約元  
 $\times$

整域では，素元は既約元になりますが，  
既約元が素元になるとは限りません．

# UFD

0や単元以外の要素が，有限個の素元の積に分解できる，

すなわち素元分解可能な整域を，一意分解整域といい，UFDと略します．

素元  $\longleftrightarrow$  既約元

一意分解整域では，素元と既約元は一致し，  
素元分解は単元倍と積の順序を除いて一意に定まります．

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_m^{a_m}$$

これを整数環の世界に落とし込むと、  
素因数分解は、 $\pm 1$ という単元を除いて一意に定まるということです。

$1 \notin \text{素数}$

つまり、1は単元なので、素数に含めるべきではないということです。

# 素因数分解の一意性 の証明

ということは、整数環が一意分解整域であることを確かめれば、  
素因数分解の一意性が証明できるはずです。

$$a = bq + r$$

整数の世界で割り算をすると，商と余りが現れます．

$$0 \leq r < b$$

余りには，このような大小関係を満たさなければなりません．

$$a = bq + r$$

$$r = 0 \text{ または } \delta(r) < \delta(b)$$

このように，割り算ができる整域を，ユークリッド整域といいます．

$$I = \text{⏮} (a)$$

ユークリッド整域のイデアルは，すべて単項イデアルになります．

PID

このような整域を単項イデアル整域といい，PIDと略します．

ユークリッド整域  $\iff$  PID  $\implies$  UFD

実は，単項イデアル整域は一意分解整域になるので，  
整数環は一意分解整域です．

$$\mathbb{Z} : \text{UFD}$$

したがって，素因数分解の一意性が成り立ちます．

# 6. 素因数分解の仕方が複数ある世界

1. 素因数分解の一意性

2. 環とイデアル

3. 一意分解整域

4. 素因数分解の一意性の証明

素因数分解の一意性の重要性を実感できるエピソードとして、  
フェルマーの最終定理の話題がありますが、  
これについてはショート動画で紹介しようと思います。

# 7. まとめ

いかがでしたか？

# 高校数学の「常識」を壊そう

- ✓ 素因数分解の無い世界
- ✓ 素因数分解の無い世界
- ✓ 素因数分解の無い世界
- ✓ 素因数分解の無い世界
- ✓ 素因数分解の無い世界
- ✓ 素因数分解の無い世界

今回の動画では，高校数学を出発して，  
そこから広がる奥深い数学の世界をご紹介します。



大学数学の内容を，高校数学を基礎として紹介したため，  
詳細を省略した部分や，厳密性に欠ける表現がありました，  
お楽しみいただけましたでしょうか？

MathAbyssでは，数学に関する記事を公開しているWebサイト「MathAbyss」を運営しております．

今後も様々な動画を制作していきますので，この動画に対する高評価，YouTubeのチャンネル登録をよろしくお願いします！

各種SNS等のフォローもしていただけると励みになります！

最後までご視聴いただき，ありがとうございました！！！！



# MathAbyss

ご視聴ありがとうございました！  
チャンネル登録よろしくお願いします！