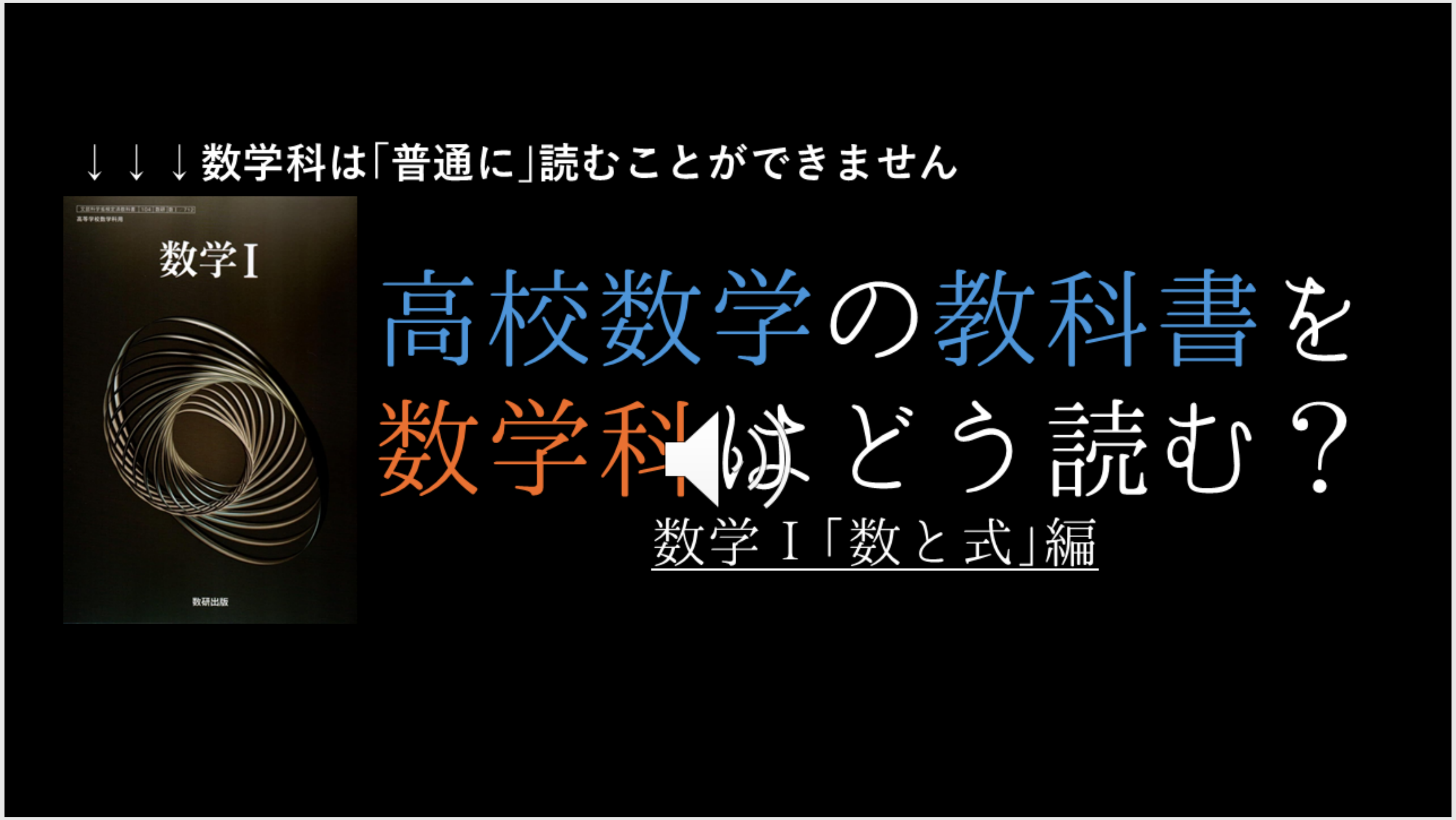
MathAbyss

この動画は，高校数学の教科書を
数学科が読むシリーズの，第2弾なのだ．



まだ前回の動画を見ていない方，忘れてしまった方は，
先に視聴されることをおすすめするのだ．

それでは，本編のスタートなのだ!

MathAbyss

数学科が
高校数学の教科書を
読むとどうなるのか

「集合と命題」編

今回も，高校数学の教科書を，
数学科の視点で解説していくわ．

前回に引き続き，数学 I の教科書を読んでいくわ．

第1章 数と式

第2章 集合と命題

第3章 2次関数

第4章 図形と計量

第5章 データの分析

今回は，第2章の「集合と命題」を読んでいくわ．

第1章 数と式
第2章 集合と命題
第3章 2次関数
第4章 図形と計量
第5章 データの分析

この単元は抜けがちだけど、
簡単だからすぐに終わりそうなのだ。

何か大きな勘違いをしているようね.

どういうことなのだ?

この単元こそが数学の土台であり，最も重要なのよ．

え!?

正直に言えば，
言いたいことは山のようにあるけれど，
なるべくコンパクトな動画になるように，
全力を尽くすわ．

ひえ〜...

ちなみに，今の「コンパクト」は，
任意の開被覆に対して，有限部分開被覆が存在する
ことを指していないことに，注意が必要ね．

は???

1 集合

2 命題と条件

3 命題と証明

まずは集合についての話なのだ.

範囲がはっきりしたものの集まりを
集合という.
集合を構成している
1つ1つのものを,
その集合の**要素**という.

教科書の集合の定義に文句をつける
ところから始めようかしら.

範囲がはっきりしたものの集まりを
集合という.
集合を構成している
1つ1つのものを,
その集合の**要素**という.

いきなり過ぎるのだ.

範囲がはっきりしたものの集まりを
集合という.
集合を構成している
1つ1つのものを,
その集合の**要素**という.

この定義は，いわゆる素朴集合論によるものであり，
それで話を進めても良いのだけど，

ラッセルのパラドックス

ラッセルのパラドックスなどの問題が生じてしまうわ.

ラッセルのパラドックス

ラッセルノパラドックス?

$$R = \{x \mid x \notin x\}$$

自身を元に持たない集合全体の集まりRを考えよう.

「元」って「要素」のことだっけ?

そう．大学以降の数学では，
元と呼ぶことが圧倒的に多いわ．

$$R = \{x \mid x \notin x\}\text{: 集合 (?)}$$

それは驚きなのだ．

ところで，Rは集まりというか集合では?

$$R = \{x \mid x \notin x\} : \text{集合 (?)}$$

確かに，教科書の定義では，
Rは集合といえるかもしれないわね．

$$R = \{x \mid x \notin x\}: \text{集合 (?)}$$

そうだよね.

集合は，与えられた数学的対象が，
その集合に属しているかどうかを，
明確に判断できなければならない．

$$\{\text{大きい整数}\} \quad (?)$$

例えば，大きい整数の集まりは集合ではない．

$$\{\ \boxed{\text{大きい}}\text{整数}\ \}\qquad(?)$$

「大きい」の基準は，人によって異なるのだ．

$$\left\{\boxed{\text{大きい}}\text{整数}\right\} \quad (?)$$

その通り．数学は，

その解釈に主観が入る，形容詞を嫌うのよ．

$$R \in R \quad (?)$$

では，RはRに属しているだろうか．

$$R = \{x \mid \boxed{x \notin x}\}$$

$$R \in R \quad (?)$$

RがRの要素だとすると，
Rは自身を含む集合になってしまうから，
これはRの定義に矛盾するのだ．

$$R \notin R \quad (?)$$

ということは，RはRに属していないのだ．

$$R = \{x \mid \boxed{x \notin x}\}$$

$$R \notin R \qquad (?)$$

もしそうだとすると，
Rは自身を元に持たない集合であるから，
RがRに属していないのはおかしいわね．

$$R \in R \qquad (?)$$

$$R \notin R \qquad (?)$$

あれ…?どういうことなのだ?

$$R \in R \qquad (?)$$

$$R \notin R \qquad (?)$$

これは，集合の定義が曖昧だから生じる問題なのよ．

じゃあ，集合はどうやって定義するのだ?

ZFC

実は色々な方法があるのだけれど，
最も代表的なのは，ZFCよ．

ZFC

ゼットエフシー?

https://mathlog.info/articles/1314

・外延性公理

$\forall x \forall y ((\forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y)) \Rightarrow x = y)$

・分出公理図式

P を集合論の論理式，P の x，z 以外の自由変数は w_0，$\ldots$，w_{i-1} で，y は P の自由変数でないとする．

$\forall w_0 \ldots \forall w_{i-1} \forall x \exists y \forall z (z \in y \Leftrightarrow (z \in x \wedge P(z)))$

・対公理

$\forall x \forall y \exists p (x \in p \wedge y \in p)$

・和集合公理

$\forall x \exists u \forall y \in x \ \forall z \in y \ z \in u$

・冪集合公理

$\forall x \exists p \forall z ((\forall y \in z \ y \in x) \Rightarrow z \in p)$

・無限公理

$\exists N ((\exists e \in N \ \forall z \ \ z \notin e) \wedge \forall x \in N \ \exists s \in N \ \forall z (z \in s \Leftrightarrow (z \in x \vee z = x)))$

・置換公理図式

P を集合論の論理式，P の a，x，y 以外の自由変数は w_0，$\ldots$，w_{i-1} で，b は P の自由変数でないとする．

$\forall w_0 \ldots \forall w_{i-1} \forall a ((\forall x \in a \ \exists ! y \ P(x,y)) \Rightarrow \exists b \forall x \in a \ \exists y \in b \ P(x,y))$

・基礎の公理

$\forall x \forall w \in x \ \exists y \in x \ \forall z \in x \ z \notin y.$

・選択公理

$\forall a ((\forall x \in a \ \exists w \ w \in x) \Rightarrow$
$((\forall x, \ y \in a \ \forall z \in x \ (z \in y \Rightarrow x = y)) \Rightarrow \exists c \forall x \in a \ \exists ! y \in c \ y \in x))$

集合は，これらの性質を満たすものとして定義するわ．

https://mathlog.info/articles/1314

・外延性公理

$\forall x \forall y ((\forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y)) \Rightarrow x = y)$

・分出公理図式

P を集合論の論理式，P の x，z 以外の自由変数は w_0，...，w_{i-1} で，y は P の自由変数でないとする．

$\forall w_0 \ldots \forall w_{i-1} \forall x \exists y \forall z (z \in y \Leftrightarrow (z \in x \land P(z)))$

・対公理

$\forall x \forall y \exists p (x \in p \land y \in p)$

・和集合公理

$\forall x \exists u \forall y \in x \ \forall z \in y \ z \in u$

・冪集合公理

$\forall x \exists p \forall z ((\forall y \in z \ y \in x) \Rightarrow z \in p)$

・無限公理

$\exists N ((\exists e \in N \ \forall z \ \ z \notin e) \land \forall x \in N \ \exists s \in N \ \forall z (z \in s \Leftrightarrow (z \in x \lor z = x)))$

・置換公理図式

P を集合論の論理式，P の a，x，y 以外の自由変数は w_0，...，w_{i-1} で，b は P の自由変数でないとする．

$\forall w_0 \ldots \forall w_{i-1} \forall a ((\forall x \in a \ \exists ! y \ P(x, y)) \Rightarrow \exists b \forall x \in a \ \exists y \in b \ P(x, y))$

・基礎の公理

$\forall x \forall w \in x \ \exists y \in x \ \forall z \in x \ z \notin y.$

・選択公理

$\forall a ((\forall x \in a \ \exists w \ w \in x) \Rightarrow$
$((\forall x, \ y \in a \ \forall z \in x \ (z \in y \Rightarrow x = y)) \Rightarrow \exists c \forall x \in a \ \exists ! y \in c \ y \in x))$

コレハ，イッタイ，ナンナノダー!?

公理的集合論

ようこそ，公理的集合論の世界へ．

教科書に戻るのだ……

さて，集合を表記する方法としては，
代表的なものが2つあるわ．

要素を書き並べる方法
要素の満たす条件を書く方法

教科書には，「要素を書き並べる方法」と
「要素の満たす条件を書く方法」の
2つが紹介されているのだ．

外延的記法
内包的記法

そうね．これらはそれぞれ，
外延的記法，内包的記法と呼ばれているわ．

$$\{1,3,5\}$$
$$\{3,5,1\}$$
$$\{1,5,1,3,3\}$$

外延的記法で書かれたこれらの集合は
すべて同じものを表しており，

$$\{x \mid x > 0\}$$

$$\{x \mid x^3 > 0\}$$

$$\{x \mid -x < 0\}$$

内包的記法で書かれたこれらの集合も，
すべて同じものを表しているわ．

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 > 0\}$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid -x < 0\}$$

ちなみに，内包的記法では，
xがどの集合の元なのかを左に明示することが多いわ．

集合の表し方はたくさんあるようなのだ.

※空集合は有限集合とします

有限個の要素からなる
集合を**有限集合**といい,
無限に多くの要素からなる
集合を**無限集合**という.

教科書では,
次に有限集合と無限集合について説明されているのだ.

※空集合は有限集合とします

ある正の整数nが存在して，
相異なる要素の数がちょうどnとなる
集合を**有限集合**といい，
有限集合でない
集合を**無限集合**という．

この定義も曖昧だわ…
せめて，このように書いてもらいたいわね．

※空集合は有限集合とします

ある正の整数nが存在して,
相異なる要素の数がちょうどnとなる
集合を**有限集合**といい,
有限集合でない
集合を**無限集合**という.

まあ，それでも伝わりはするのだ．

※空集合は有限集合とします

$$f:\{1,2,\dots,n\}\to X$$

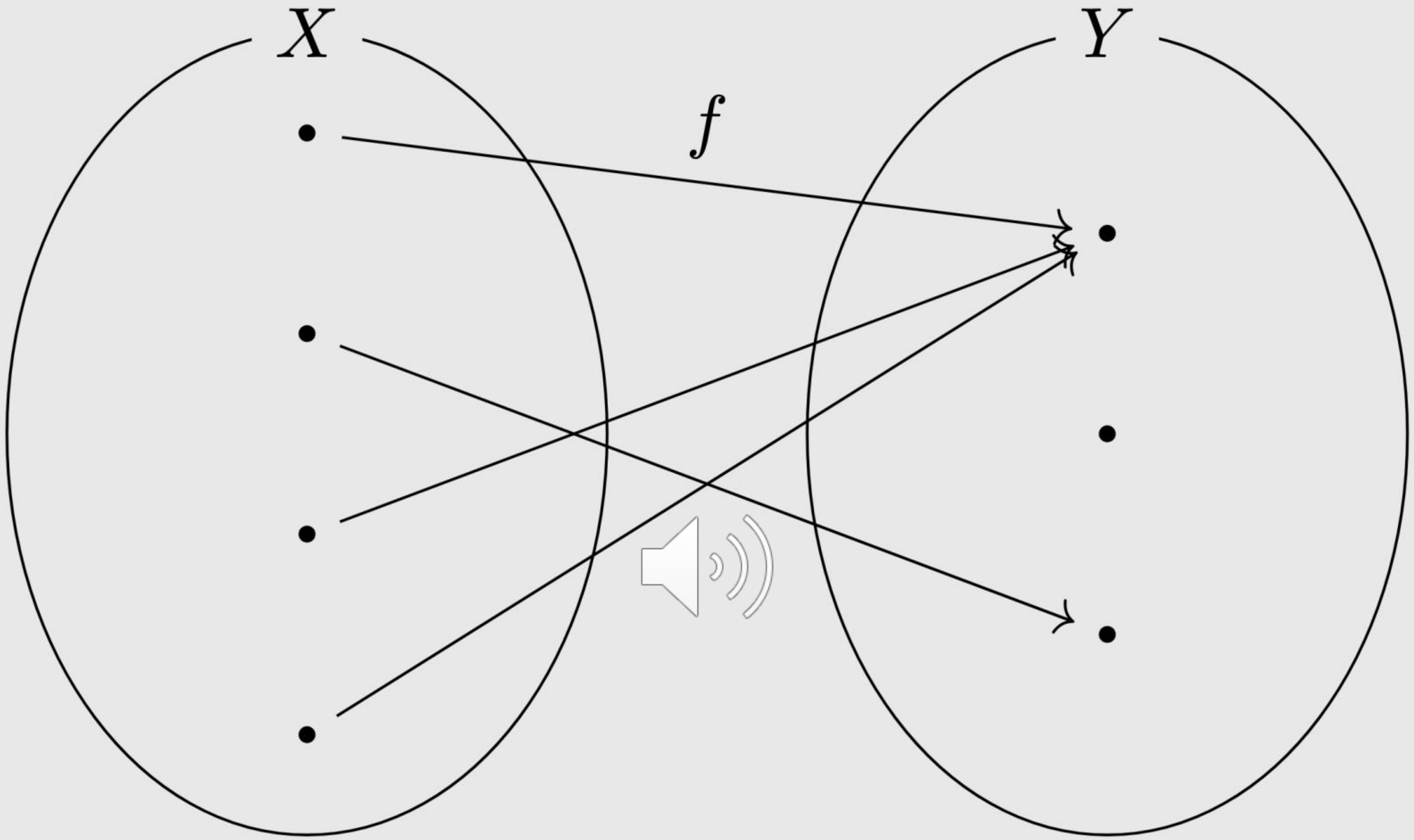
より厳密には，Xが有限集合であるとは，
ある正の整数nが存在して，
1以上n以下の整数全体の集合との
全単射が存在することを言うわ．

全単射

ゼンタンシャ?

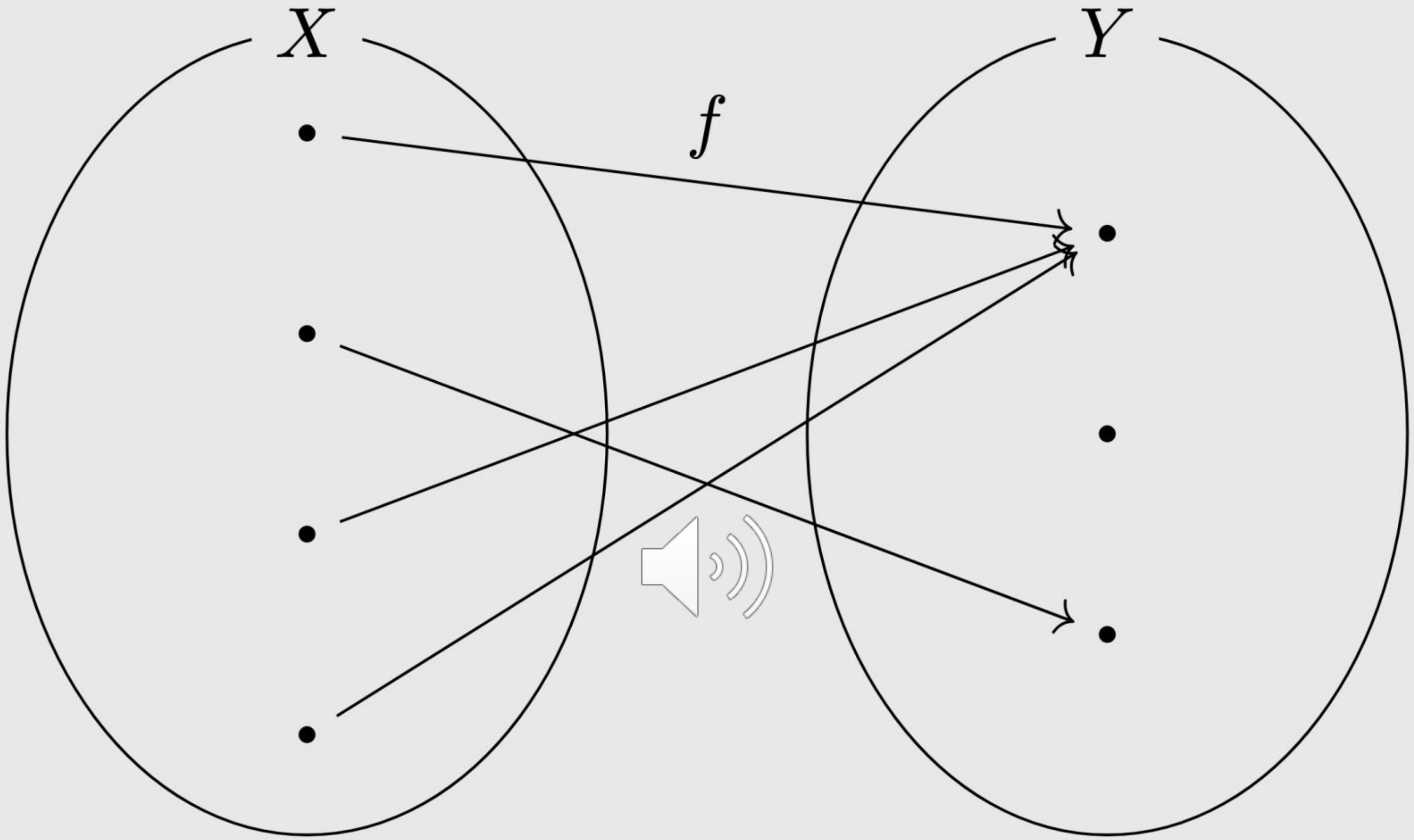
写像

そういえば，
高校数学では写像を扱っていなかったわね．



こんな感じで，

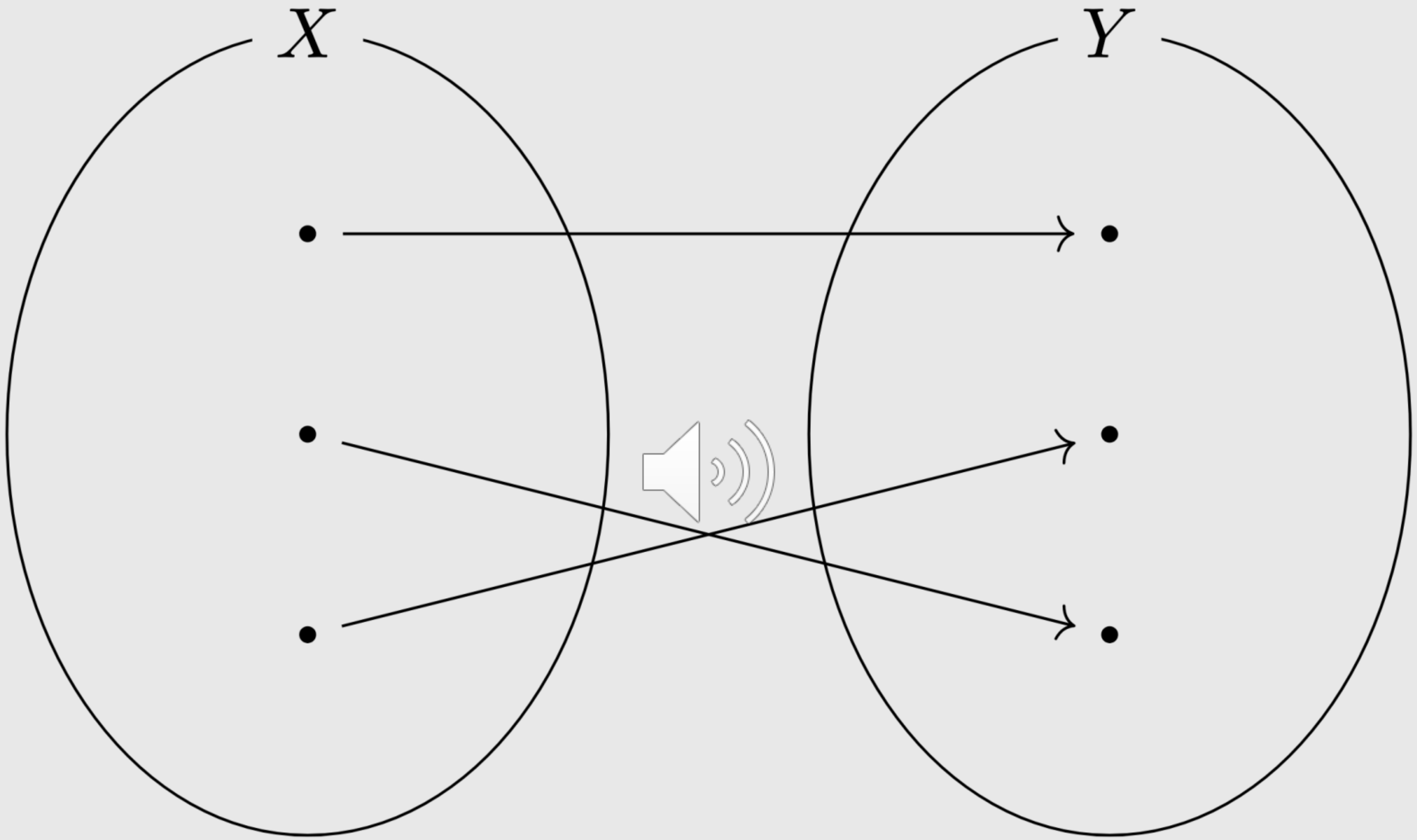
集合の元を対応させる規則を，写像というわ．



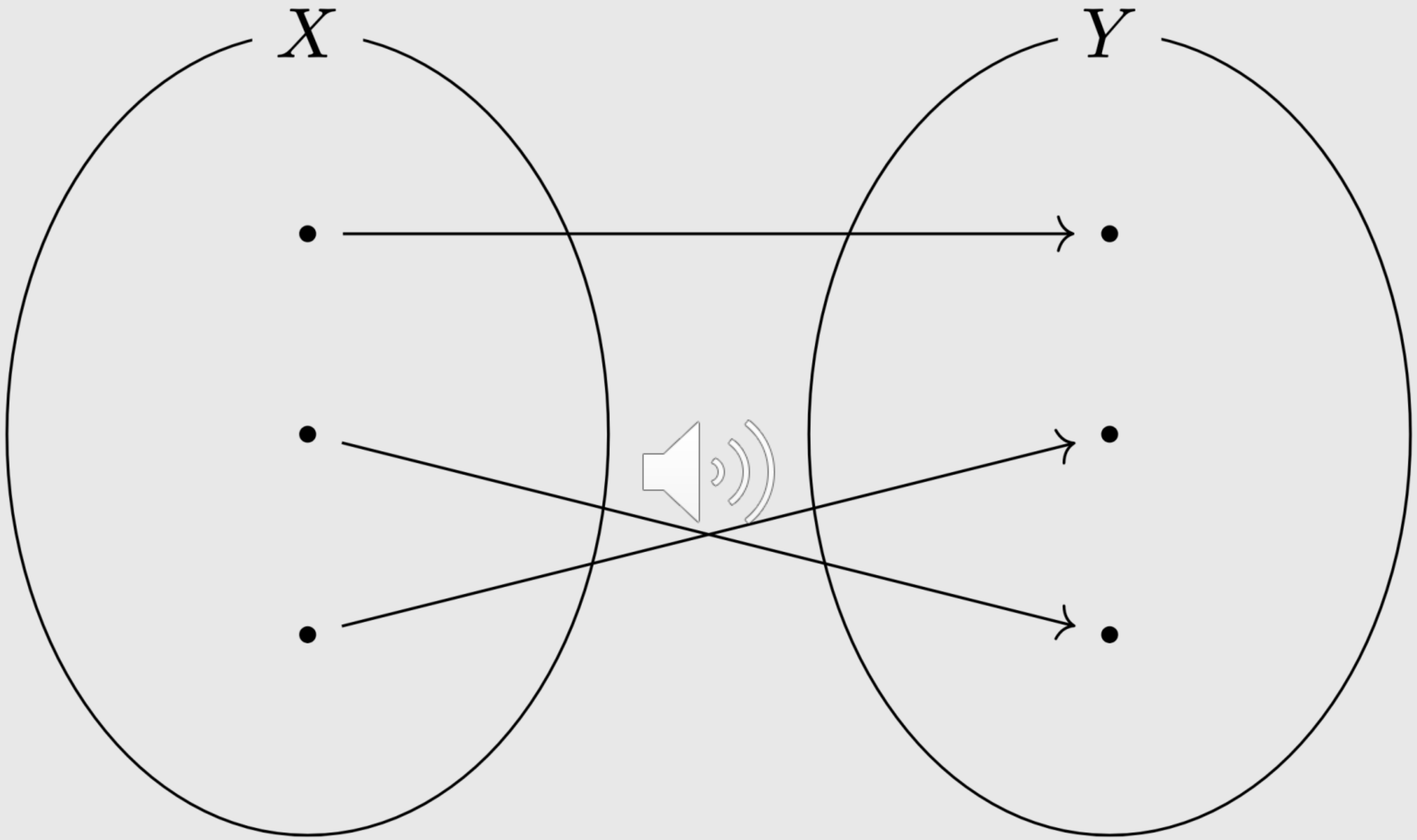
この動画は，あくまでも「高校数学」の
曖昧な部分に切り込んでいくから，
写像の厳密な定義は省略するわ．

https://mathabyss.com/mapping/

写像については、
こちらの記事で詳しく解説されているのだ!



で，全単射というのは，1対1に対応する写像，
つまりはもれなくダブりなく対応する写像のことよ．



分かったような，分かってないような…

濃度

集合の元の数は，
写像を用いて考えることが重要なのよ．
これは集合の「濃度」へと発展していくわ．

濃度

食塩水の話をされても困るのだ．

濃度

何を言っているのかしら．集合の濃度というのは，

一般に，2つの集合A, Bにおいて，

Aのどの要素もBの要素であるとき，すなわち

$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$　ならば　$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}$

が成り立つとき，

AはBの**部分集合**であるといい，

記号で$\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$と表す．

教科書に戻ると，

次に部分集合について説明されているのだ．

一般に，2つの集合A, Bにおいて，
Aのどの要素もBの要素であるとき，すなわち

$$\boldsymbol{x \in A} \quad \text{ならば} \quad \boldsymbol{x \in B}$$

が成り立つとき，
AはBの**部分集合**であるといい，
記号で$\boldsymbol{A \subset B}$と表す.

このあたりの説明はほとんど問題ないわね.

意味	流儀1	流儀2
AはBの部分集合である	$A \subset B$	$A \subseteq B$
AはBの真部分集合である$(A \neq B)$	$A \subsetneq B$	$A \subset B$

集合の包含関係を表すこの記号だけれど，
別の流儀もあって，たまにややこしいときがあるわね．

意味	流儀1	流儀2
AはBの部分集合である	$A \subset B$	$A \subseteq B$
AはBの真部分集合である$(A \neq B)$	$A \subsetneq B$	$A \subset B$

個人的には，実数の大小関係を表す不等号と
統一してほしい気持ちもあったわね．

要素を1つも持たない集合も考える．
この集合を**空集合**といい，記号$\emptyset$で表す．

その次に載っている空集合の記号についても，
実際はいろいろな表記があって，

https://www.chart.co.jp/subject/sugaku/suken_tsushin/77/77-9.pdf

Q.3

数研の教科書では空集合の記号を ∅（○に斜線）で表していますが，ギリシャ文字の ϕ（ファイ）で表す教科書も多いです。どういうことでしょうか。

Ans.3 空集合の記号については，学習指導要領で指定されていません。教科書検定上は ∅（○に斜線）でも ϕ（ファイ）でもどちらでもよいという判断がされています。

ヴェイユ（1906–1998）が彼の著作で使ったのが起源と言われ，もとはノルウェー語のアルファベットの一つのようです。

これについて，

数研出版はこのように回答しているわ．

2つの集合A, Bに対して,
AとBのどちらにも属する要素全体の集合を,
AとBの**共通部分**といい，$\boldsymbol{A \cap B}$で表す.
また，AとBの少なくとも一方に
属する要素全体の集合を,
AとBの**和集合**といい，$\boldsymbol{A \cup B}$で表す.

先に進むと，集合の共通部分や和集合
について説明されているのだ.

3つの集合A, B, Cに対して，
A, B, Cのどれにも属する要素全体の集合を，
A, B, Cの**共通部分**といい，$\boxed{\boldsymbol{A \cap B \cap C}}$で表す．
また，A, B, Cの少なくとも1つに
属する要素全体の集合を，
A, B, Cの**和集合**といい，
$\boxed{\boldsymbol{A \cup B \cup C}}$で表す．

3つの集合の共通部分や和集合についての説明で，
いきなりこの記号を使っているけれど，

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

厳密には結合法則を述べてからにするべきだわ.

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

結合法則が成り立つから，括弧を書かなくても，
どの集合を表しているのかが分かるのだ!

全体集合Uの部分集合Aに対して，
Aに属さないUの要素全体の集合を，
Uに関するAの**補集合**といい，
$\overline{A}$で表す．

その通りよ．
次に，補集合について解説されているわね．

↓「左の記号を右の式で定義する」という記号

$$A^c \coloneqq U \setminus A \coloneqq \{x \in U \mid x \notin A\}$$

大学数学では，補集合はこのように表すわ．

$$\boxed{A^c} := U \setminus A := \{x \in U \mid x \notin A\}$$

↑「左の集合から右の集合を除いた」
集合である差集合を表す記号

なんでcを使うのだ?

補集合：Complement

$\overline{A}$ ： Aの閉包

cは補集合の英語の頭文字よ.
高校数学の補集合の表記は,
閉包の意味で用いることが多いわ.

閉包

ヘイホウ?

位相空間

詳しく知りたいなら，
位相空間の勉強をおすすめするわ．

全体集合やド･モルガンの法則については
口を閉ざすことにして，次に行くわよ．

集合については一旦終わって，命題の話に入るのだ．

命題は次の3つの性質を満たす.

1. (**同一律**(law of identity))命題PはPである.
2. (**無矛盾律**(law of noncontradiction))「命題Pが真」かつ「命題Pが偽」となることはない.
3. (**排中律**(law of excluded middle))「命題Pが真でない」かつ「命題Pが偽でない」となることはない.

命題は真偽が定まるものだけど，
もう少し深入りすると，これら3つの性質を満たすわ.

命題は次の3つの性質を満たす.

1. (**同一律**(law of identity))命題PはPである.
2. (**無矛盾律**(law of noncontradiction))「命題Pが真」かつ「命題Pが偽」となることはない.
3. (**排中律**(law of excluded middle))「命題Pが真でない」かつ「命題Pが偽でない」となることはない.

よく見ると，当たり前のことしか言っていないのだ.

文字xを含んだ文や式を，　xに関する**条件**という．

一般に，全体集合をUとする命題$p \Longrightarrow q$において，
条件pを満たすUの要素全体の集合をP，　$\cdots$

偽である命題$p \Longrightarrow q$において，仮定pを満たすが，
結論qを満たさないものを，この命題の**反例**という．

次に，条件や真理集合，反例について書かれているのだ．

文字xを含んだ文や式を，xに関する**条件**という．

一般に，全体集合をUとする命題$p \Longrightarrow q$において，
条件pを満たすUの要素全体の集合をP，…

偽である命題$p \Longrightarrow q$において，仮定pを満たすが，
結論qを満たさないものを，この命題の**反例**という．

まあ，これについてはほとんど問題ないわね．

2つの条件p, qについて，
命題$p \Longrightarrow q$が真であるとき，

pはqであるための**十分条件**である，
qはpであるための**必要条件**である

という．

その次には，
必要条件や十分条件について解説されているのだ．

2つの条件p, qについて,
命題$p \Longrightarrow q$が真であるとき,

pはqであるための**十分条件**である,
qはpであるための**必要条件**である

という.

必要条件や十分条件の定義を
しっかり言える人は本当に少ないわね.

2つの条件p, qについて，
命題$p \Longrightarrow q$が真であるとき，

pはqであるための**十分条件**である，
qはpであるための**必要条件**である

という．

今の言葉はとても刺さったのだ...

条件「pでない」を条件pの**否定**といい，
$\overline{p}$で表す．

さらに条件の否定について書かれているけれど，

$$\neg p：\ p\text{の否定}$$

これは補集合のときと同じで，
別の表記が用いられることが多いわ．

最後は，命題と証明についてなのだ．

命題$p \Longrightarrow q$に対して

$q \Longrightarrow p$を$p \Longrightarrow q$の**逆**

$\overline{p} \Longrightarrow \overline{q}$を$p \Longrightarrow q$の**裏**

$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$を$p \Longrightarrow q$の**対偶**

という．

逆，裏，対偶について述べられているわね．

nは整数とする．次の命題を証明せよ．

n^2が偶数ならば，nは偶数である．

対偶を証明する例題として，

この問題が紹介されているのだ．

nは整数とする．次の命題を証明せよ．

n^2が偶数ならば，nは偶数である．

この問題は，対偶を考えずとも解けるわ．

nは整数とする．次の命題を証明せよ．
n^2が偶数ならば，nは偶数である．

背理法とか...?

nは整数とする．次の命題を証明せよ．

n^2が偶数ならば，nは偶数である．

まあ，それは実質同じ証明になるから，
別の方法を紹介するわ．

$$n = n^2 - n(n-1)$$

まず，この等式から出発するわ．

$$n = n^2 - n(n-1)$$

この式はどこから出てきたのだ!?

$$n = n^2 - \overset{\text{偶数}}{\boxed{n(n-1)}}$$

連続する2つの整数の積が
偶数になるのは大丈夫かしら.

$$n = n^2 - \overset{\text{偶数}}{\boxed{n(n-1)}}$$

連続する2つの整数ってことは，一方が奇数で，
もう一方が偶数になるはずだから，積は偶数になるのだ．

$$n = \overset{\text{偶数}}{\boxed{n^2 - n(n-1)}}$$

今，n^2は偶数だったから，
この等式の右辺は偶数になるわ．

$$\overset{\text{偶数}}{\boxed{n}} = n^2 - n(n-1)$$

というこことは，左辺のnも偶数となるのだ!

$$\overset{\text{偶数}}{\boxed{n}} = n^2 - n(n-1)$$

そういうことよ．さっさと次に行くわね．

ある命題を証明するのに,
その命題が成り立たないと仮定すると
矛盾が導かれることを示し,
そのことによってもとの命題が
成り立つと結論する方法がある.
この証明法を**背理法**という.

次は背理法なのだ!

13通りの方法で

背理法

図形

等比数列

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

線形代数

mod

連分数

$\sqrt{2}$の無理性を示そう

背理法の代表例として，

$\sqrt{2}$が無理数であることの証明があるけれど，

それについてはこの動画で詳しく解説しているわ．

円周率$\boldsymbol{\pi}$が無理数であることを用いて，
次の命題を証明せよ．
$\sqrt{\pi}$は無理数である．

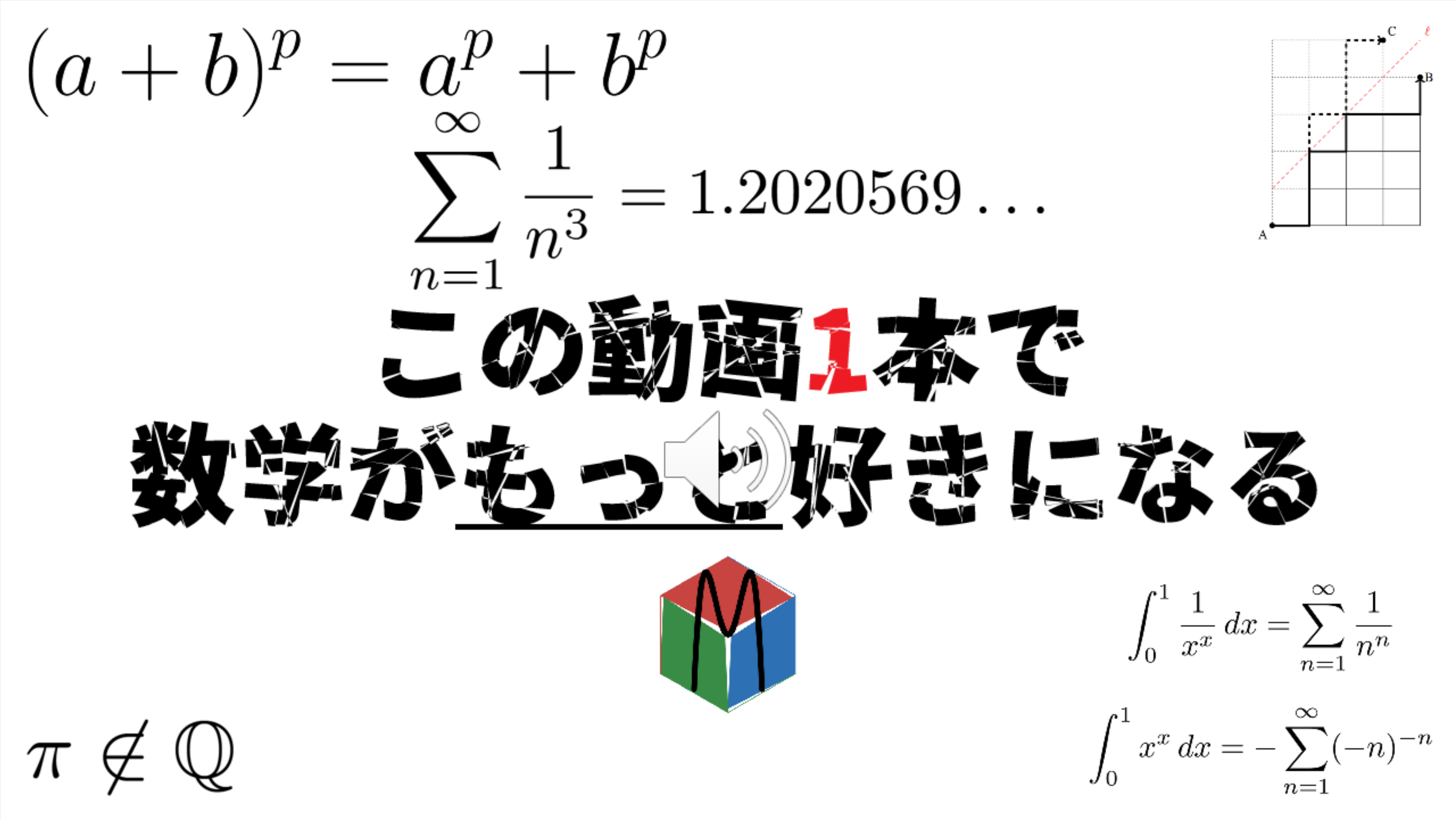
ちなみに，教科書の練習問題には，
こんな問題があるのだ．

円周率$\boldsymbol{\pi}$が無理数であることを用いて,

次の命題を証明せよ.

$\sqrt{\pi}$は無理数である.

円周率が無理数であることを認めて解く問題なのね.



円周率が無理数であることの証明は,
この動画で簡潔に解説されているのだ!

発展 命題「すべてのxについてp」「あるxについてp」

最後に，発展内容として，
「すべて」と「ある」の否定について書かれているわね．

発展 命題「すべてのxについてp」「あるxについてp」

発展内容ではあるけれど，
とても重要な内容だから，ぜひ知っておいてほしいわ．

今回は，「集合と命題」について見てきたのだ．
前回より頭を使った気がするのだ．

Column

無理数と有理数，どちらが多いか

一番最後にコラムが載っているわよ．

一般に集合の要素の個数を拡張した
「濃度」と呼ばれる概念があって,

あ!「濃度」って書いてあるのだ!

有理数全体：可算濃度
無理数全体：連続体濃度

有理数全体の集合の濃度は可算濃度で，
無理数全体の集合の濃度は連続体濃度になるわ．

有理数全体：可算濃度
無理数全体：連続体濃度

カサンノウド?レンゾクタイノウド?

いずれにせよ，伏線回収成功ね．

今回
「集合と命題」編

今回の動画はここまでなのだ!

次回
「2次関数」編

次回は「2次関数」編になるけど，話す内容が少なそうだから，
いくつかのポイントを引き伸ばして解説しようかしら．

次回
「2次関数」編

次回はお一人で話してみてはいかがでしょうか.

MathAbyssでは，数学に関する記事を公開しているWebサイト「MathAbyss」を運営しております．

この動画に対する高評価，YouTubeのチャンネル登録をよろしくお願いします!

メンバーシップでは，動画の先行視聴や限定動画等の特典をご用意しております!

各種SNS等のフォローもしていただけると励みになります!

最後までご視聴いただき，ありがとうございました!!!

MathAbyss

ご視聴ありがとうございました！
チャンネル登録よろしくお願いします！