2次関数

今回は，数学Iの「2次関数」の単元を，
数学科の視点で解説していくわ．

2次関数

前回の動画の最後で，

「あまり話すことがない」って言ってなかったっけ?

2次関数

メインとなる2次関数自体には,
あまり深堀りする箇所はないのだけど,

関数とは?

判別式とは?

2次関数

・・・

それ以外の箇所で,

高校数学の浅はかさを露呈させてやろうと思うわ.

関数とは？

2次関数

判別式

⋮

関数とは?

2次関数

判別式とは?

用事を思い出したので，帰宅したいと思うのだ．

じゃあ，用事が終わり次第，
ずんだもんの家で続きをしようかしら．

用事がなかったことを思い出したので，

このまま続けてほしいのだ．

すでに，数学Iの「数と式」，「集合と命題」については
解説しているので，そちらもぜひ見てほしいわ．

それでは，本編のスタートなのだ!

MathAbyss

MathAbyss

数学科が
高校数学の教科書を
読むとどうなるのか

数学I「2次関数」編

2次関数とグラフ

1 関数とグラフ

2 2次関数のグラフ

3 2次関数の最大と最小

4 2次関数の決定

まずは関数とグラフの話なのだ.

1.1. 関数とグラフ

2つの変数x, yがあって,
xの値を定めるとそれに対応して
yの値がただ1つ定まるとき,
yはxの **関数** であるという.

教科書の関数の説明を見てほしいわ.

1.1. 関数とグラフ

2つの変数x, yがあって，
xの値を定めるとそれに対応して
yの値がただ1つ定まるとき，
yはxの **関数** であるという．

まあ，xの値が決まるとyの値が決まるという，
対応関係を表しているのが関数ってことだよね．

2つの変数x, yがあって，
xの値を定めるとそれに対応して
yの値がただ1つ定まるとき，
yはxの **関数** であるという．

さて，この説明の浅はかさについて，
詳しく述べておこうと思うわ．

1.1. 関数とグラフ

2つの変数x, yがあって，
xの値を定めるとそれに対応して
yの値がただ1つ定まるとき，
yはxの **関数** であるという．

始まったのだ・・・．

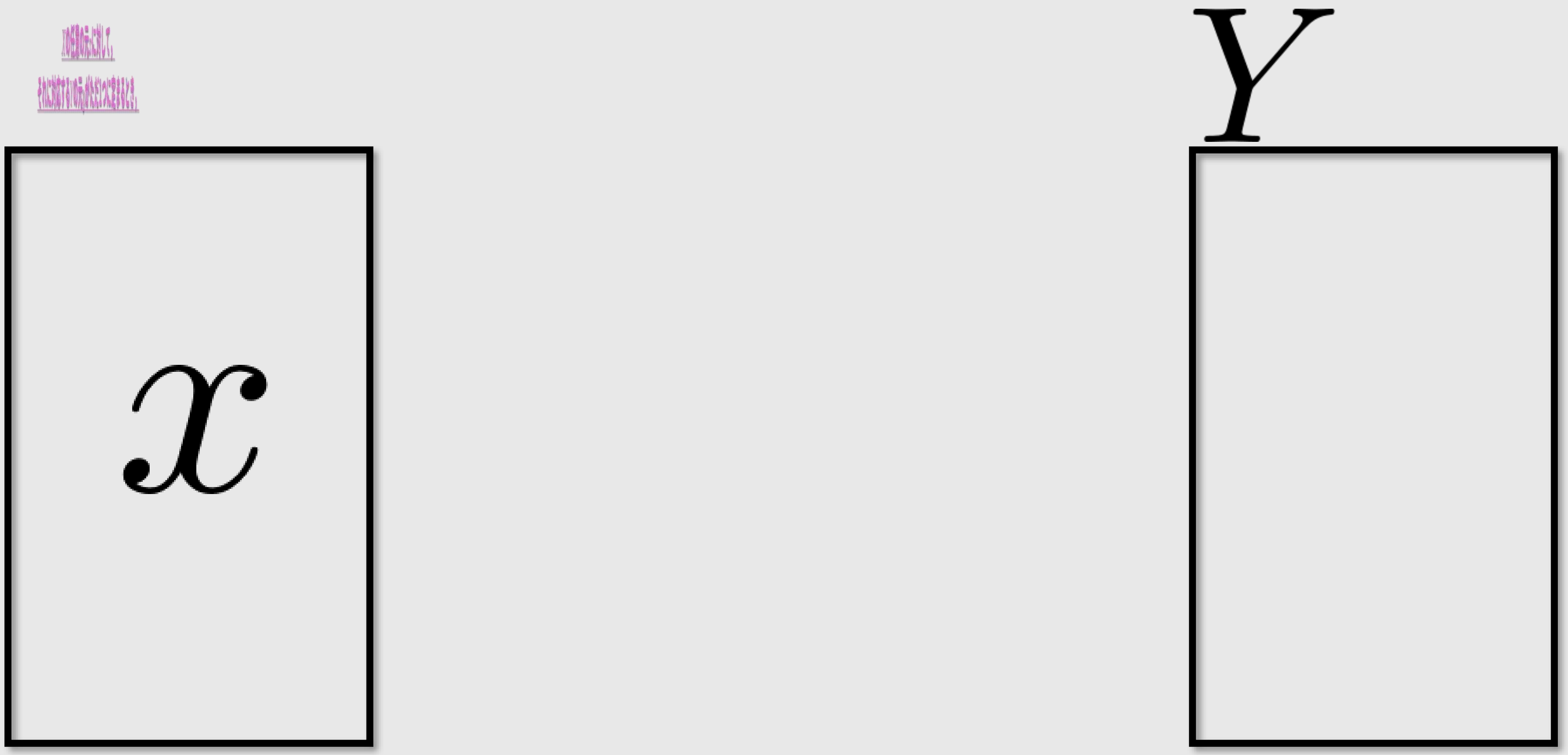
X Y

まず，2つの集合XとYを考えるわ．

1.1. 関数とグラフ

集合については，前回の動画で詳しく取り上げたのだ．

1.1. 関数とグラフ



Xの任意の元xに対して，

それに対応するYの元yがただ1つに定まるとき，

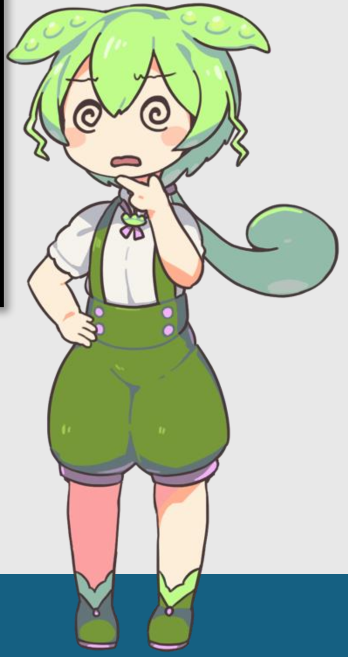
X

$$x \longmapsto y$$

この対応規則をXからYへの写像というわ.

$$X \qquad\qquad\qquad Y$$

$$x \longmapsto y$$



シャゾウ?

そういえば，前回も出てきたような気がするけど，

今は関数の話をしているんじゃなかったっけ?

X $\qquad\qquad\qquad$ Y

$$x \longmapsto y$$

関数は写像の一種なのよ．

でも，難しく考える必要はなくて，

2つの集合の対応関係に過ぎないわ．

1.1. 関数とグラフ

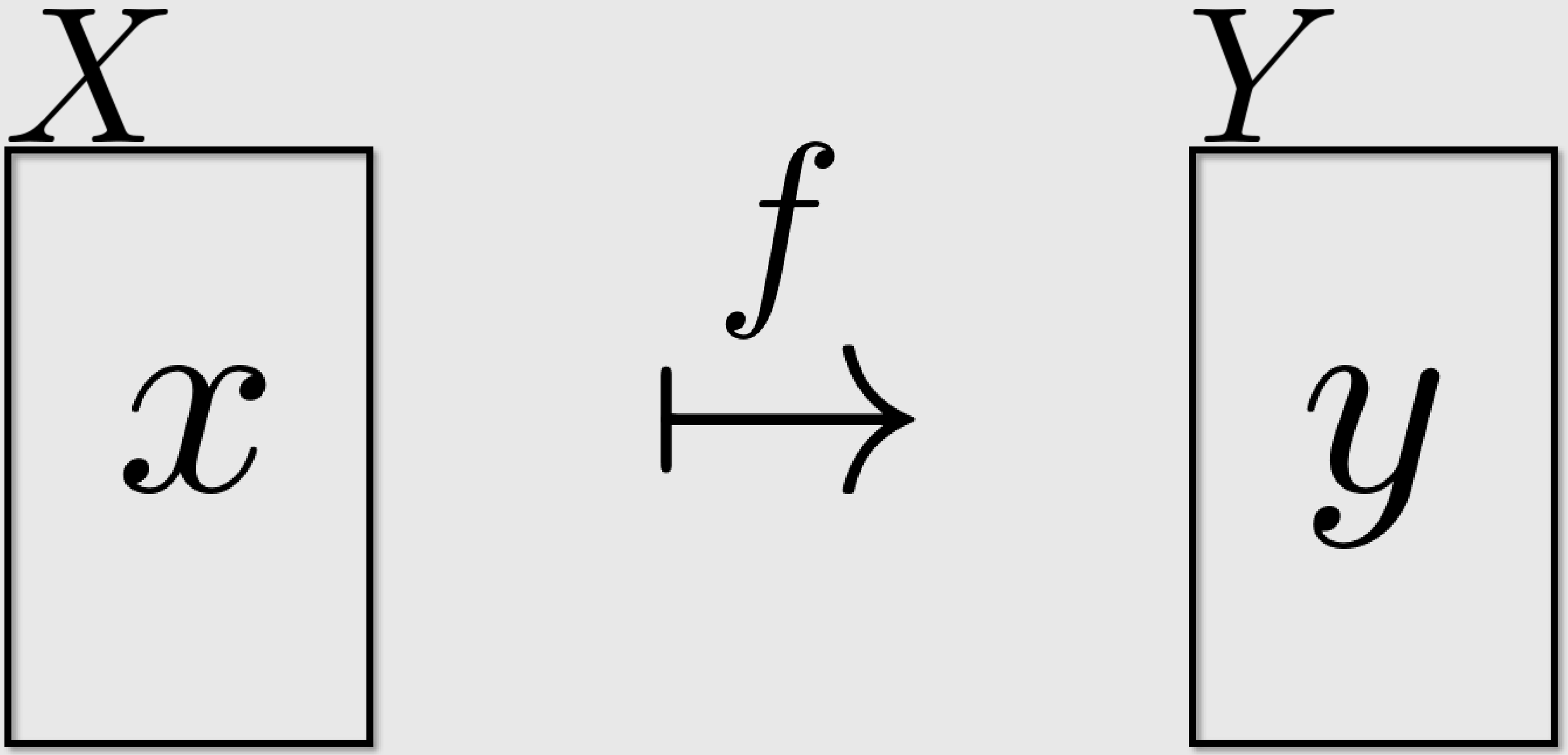
もっと分かりやすく言うなら，Xの各元から，
Yの元への矢印が1本だけ引けるということよ．

元＝要素

ところで，さっきから出てくる「元」は，
集合の「要素」のことだよね．

元＝要素

そう．前回の動画でも話したけど，
大学数学では「元」と呼ぶほうが一般的だわ．



さて，XからYへの写像にfという名前を付けてみるわ．

1.1. 関数とグラフ

X 定義域 　　　　　　　　Y 終域

$$x \longmapsto y$$

このとき，Xをfの定義域，Yをfの終域というわ．

定義域　　　　終域

$$f : X \longrightarrow Y$$

写像は，定義域や終域を明示して，このように書くわ．

定義域　　　　$\boxed{\text{終域}}$

$$f : X \to Y$$

シュウイキ?「定義域」や「値域」なら知ってるのだ.

$$f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3\}$$

具体的に考えてみるわ．このような写像fを，

1.1. 関数とグラフ

$$f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$$
$$f(1) = f(2) = 1,\ f(3) = 2$$

このように定めると，定義域と終域はどうなるかしら?

1.1. 関数とグラフ

$$f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$$

$$f(1) = f(2) = 1,\ f(3) = 2$$

$$\{1, 2, 3\}$$

さっきの話を思い出すと，

定義域も終域も，同じくこの集合になるのだ．

$$f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3\}$$
$$f(1)=f(2)=1,\ f(3)=2$$

そうね．では，fの値域を考えてみるわ．

$$f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$$

$$\boxed{f(1) = f(2) = 1,\ f(3) = 2}$$

Xの各元を写像fで写すと，
1や2にはなるけれど，3にはならないわね．

$$f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$$

$$\boxed{f(1) = f(2) = 1,\ f(3) = 2}$$

それはそうなのだ.

$$f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$$

$$f(1) = f(2) = 1,\ f(3) = 2$$

$$\{1, 2\}$$

このとき，fの値域は，この集合になるわ．

1.1. 関数とグラフ

$$f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$$

$$f(1) = f(2) = 1,\ f(3) = 2$$

$$\{1, 2\} = \{f(1), f(2), f(3)\}$$

なるほど．値域とは，Xの要素が写像fによって写るYの元全体の集合ということなのだ．

$$f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$$
$$f(1) = f(2) = 1,\ f(3) = 2$$

$$\{1, 2\} = \{f(1), f(2), f(3)\}$$

その通りよ.

関数 vs 写像

ところで，関数が写像の一種なら，
関数と写像の違いは何なのだ?

関数 vs 写像

実は明確な違いはなくて，
極論を言えばどっちでも良いわ．

↓実数から実数への写像,
複素数から複素数への写像など

関数 vs 写像

ただ，一般的には，
定義域や終域が実数や複素数などの写像を，
関数と呼ぶことが多いわね．

↓実数から実数への写像,
複素数から複素数への写像など

関数 vs 写像

へえ～.

「対応」とは?

さて，写像は2つの集合の「対応関係」を表している
と言ったけど，「対応」とは何だと思う?

「対応」とは?

え!?「対応」は「対応」なのでは?

$$f : X \to Y$$

実は，写像はもう少し厳密に定義することができるのよ．

$$X \times Y$$

2つの集合XとYの直積を考えるわ.

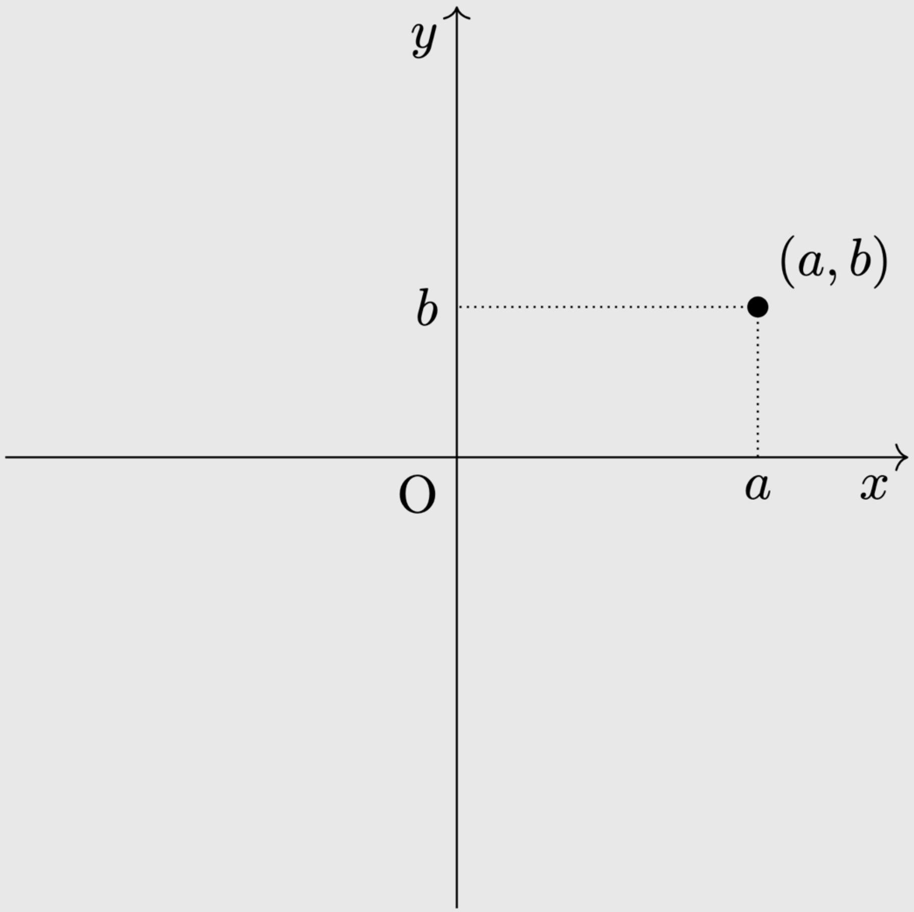
$$X \times Y$$

チョクセキ?

1.1. 関数とグラフ

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}$$

Xの元とYの元をペアにしたもの全体の集合よ．
例えば，実数と実数の直積は座標平面になるわ．



確かに，座標平面では，
平面上の点を実数と実数のペアで表すのだ．

1.1. 関数とグラフ

$$f \subset X \times Y$$

さて，fが写像であるとは，

fはXとYの直積の部分集合であって，

$$f \subset X \times Y$$

任意の$x \in X$に対して,
ある$y \in Y$がただ1つ存在して,
$(x, y) \in f$となる.

このような条件を満たすことを言うわ.

$$f \subset X \times Y$$

任意の$x \in X$に対して,
ある$y \in Y$がただ1つ存在して,
$(x, y) \in f$となる.

ちょっと待って．写像って集合だったの?

1.1. 関数とグラフ

$$f \subset X \times Y$$

任意の$x \in X$に対して，
ある$y \in Y$がただ1つ存在して，
$(x, y) \in f$となる．

この厳密な定義では，正確には
組(X, Y, f)を写像として定義するわ．

$$f \subset X \times Y$$

任意の$x \in X$に対して,
ある$y \in Y$がただ1つ存在して,
$(x, y) \in f$となる.

まだ教科書を1ページしか読んでいないのに,
すでに頭がパンクしそうなのだ.

関数の表記についても，重要な注意をしておくわ．

1.1. 関数とグラフ

$$f(x)$$

高校数学では，このような表記を見かけるけど，

$$\boxed{f}(x)$$

あくまでも関数を表しているのはfであって，

1.1. 関数とグラフ

$$\boxed{f(x)}$$

$f(x)$は，関数fにxを代入した値を表しているわ．

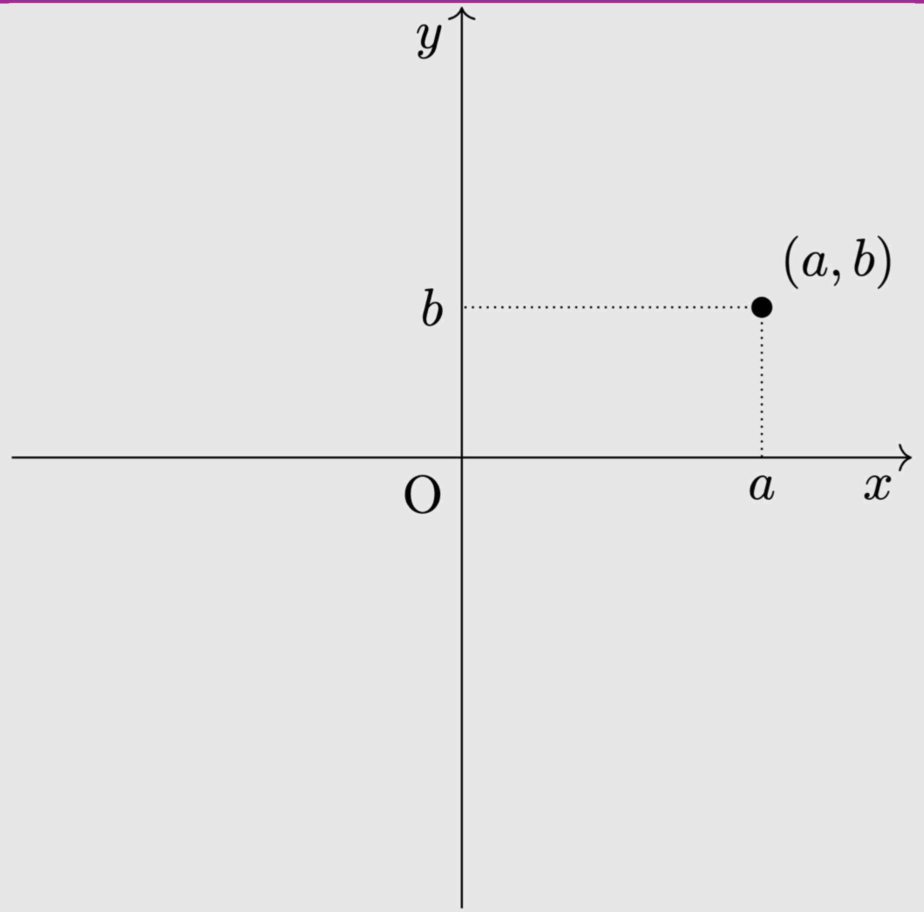
$$\boxed{f}(x)$$

もう一度言うけど，あくまでも関数の本体はfなのよ．

1.1. 関数とグラフ

やっと次に進めるのだ.

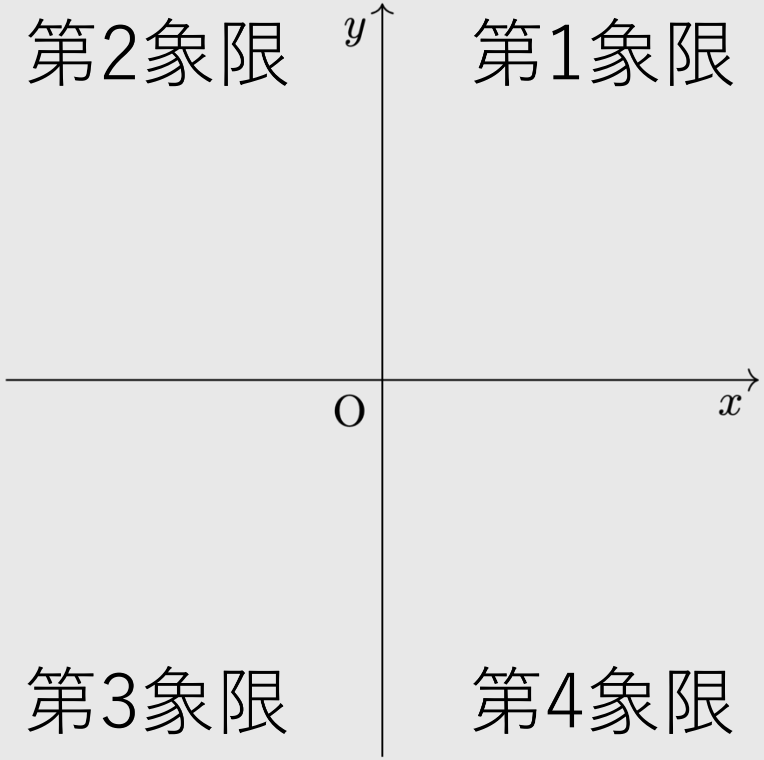
$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$



次は座標についての説明ね.
さっきも説明したけど,
座標平面は実数と実数の直積と捉えることができるわ.

1.1. 関数とグラフ

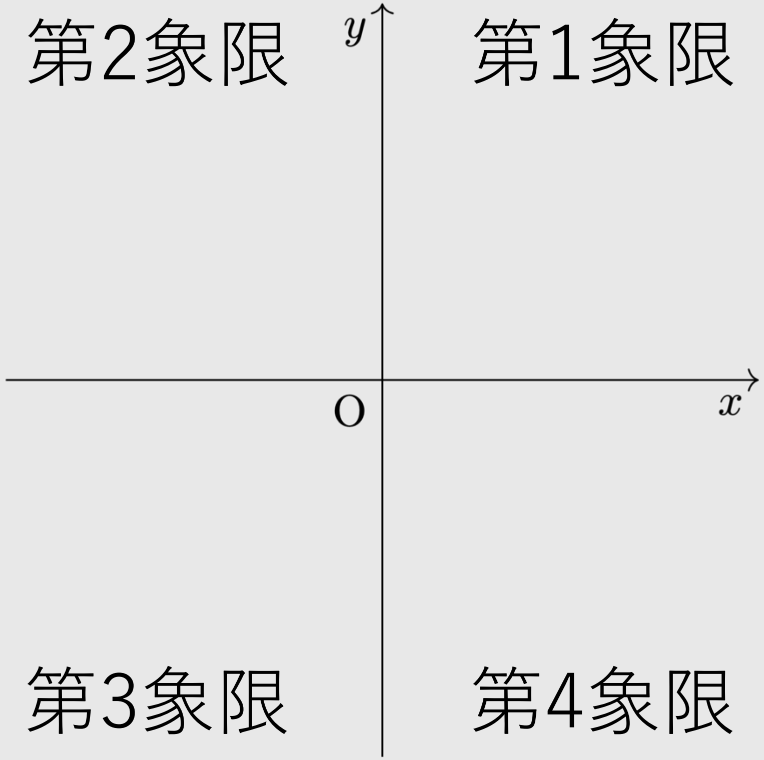
座標軸で分けられた座標平面の4つの部分を，
それぞれ図のように**第1象限**，**第2象限**，**第3象限**，**第4象限**という．



その次のこれは，たまに出てきて混乱する用語なのだ．

1.1. 関数とグラフ

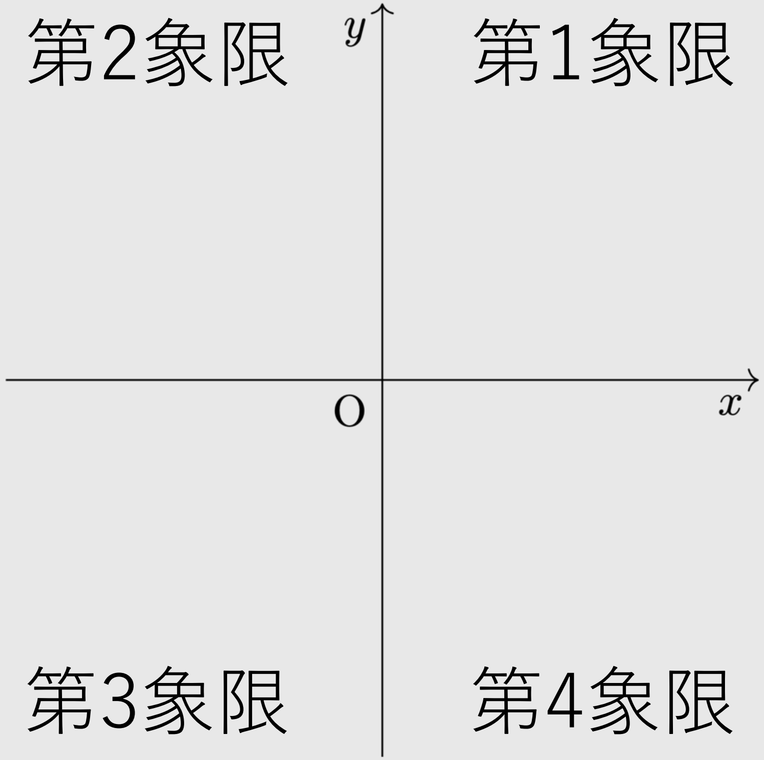
座標軸で分けられた座標平面の4つの部分を，
それぞれ図のように**第1象限**，**第2象限**，**第3象限**，**第4象限**という．



単位円を用いた三角関数の定義を知っていれば，
順番はすぐに覚えられるわ．

1.1. 関数とグラフ

座標軸で分けられた座標平面の4つの部分を，
それぞれ図のように**第1象限，第2象限，第3象限，第4象限**という．



でもそれは数学IIの範囲なのだ･･･．

座標軸で分けられた座標平面の4つの部分を,
それぞれ図のように**第1象限**, **第2象限**, **第3象限**, **第4象限**という.

ただし,
座標軸上の点は,
どの象限にも属さない
とする.

x軸やy軸上の点がどの象限にも
属していないことは, 意外と知られていないわね.

xの1次式で表される関数を,
xの **1次関数** という.

xの1次式で表される関数を，
xの **1次関数** という．

特に言うことはないから，次に進むわ．

2つ目は，2次関数のグラフを描いていくのだ!

$y = ax^2$のグラフ

さっきと同じように,

中学数学の復習から始まっているのだ.

点(a, b)を

x軸方向にp，y軸方向にqだけ

移動した点の座標は

$$(a+p, b+q)$$

である．

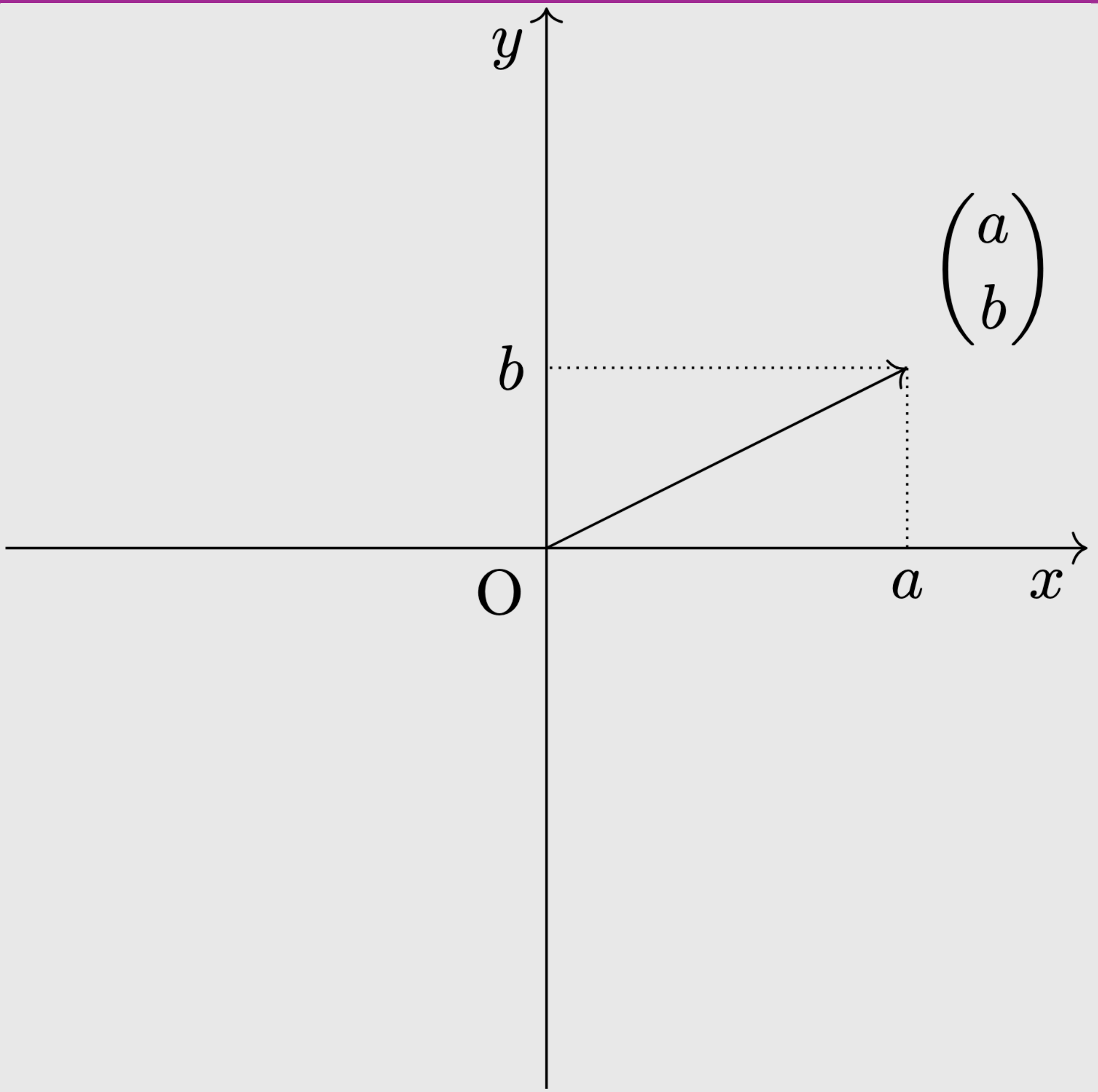
そして，点の移動について整理されているわね．

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+p \\ b+q \end{pmatrix}$$

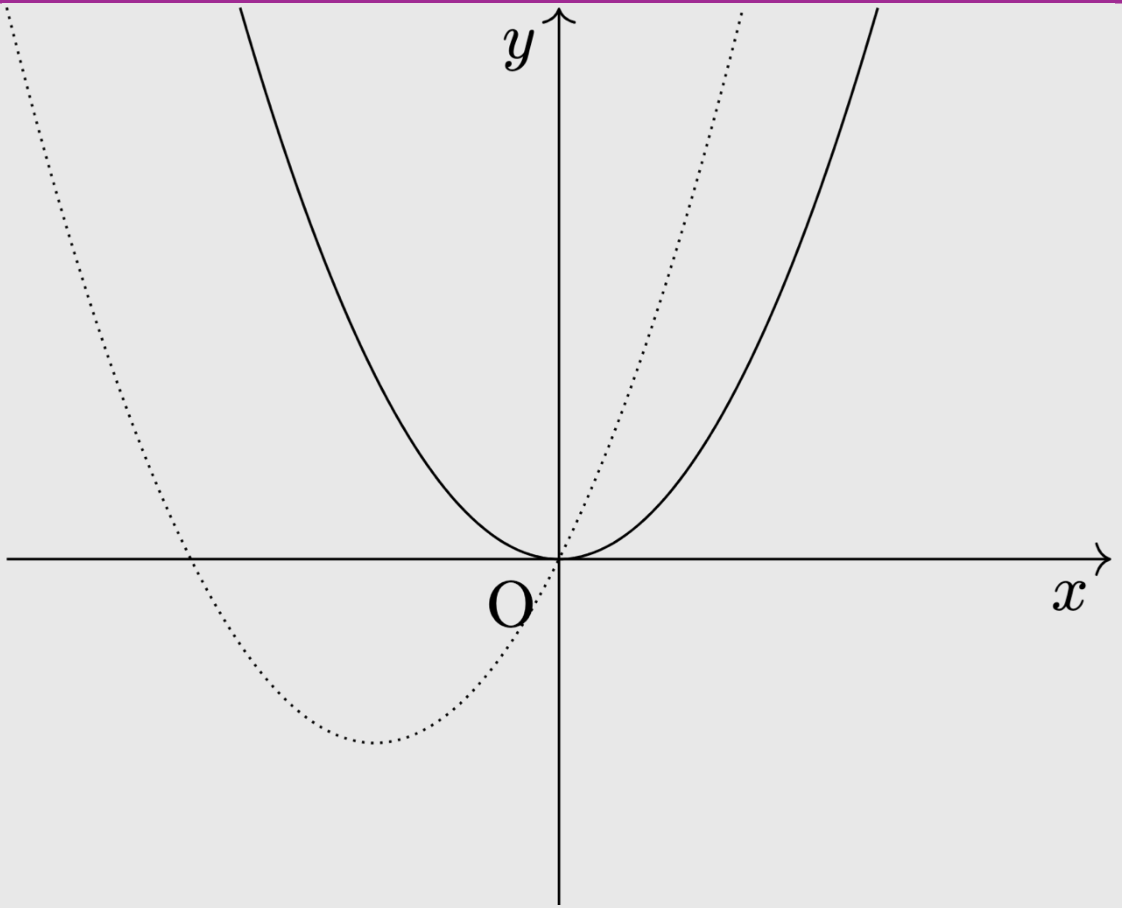
点の平行移動は，数学Cのベクトルの知識を使うと，
このように整理できるわね．

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+p \\ b+q \end{pmatrix}$$

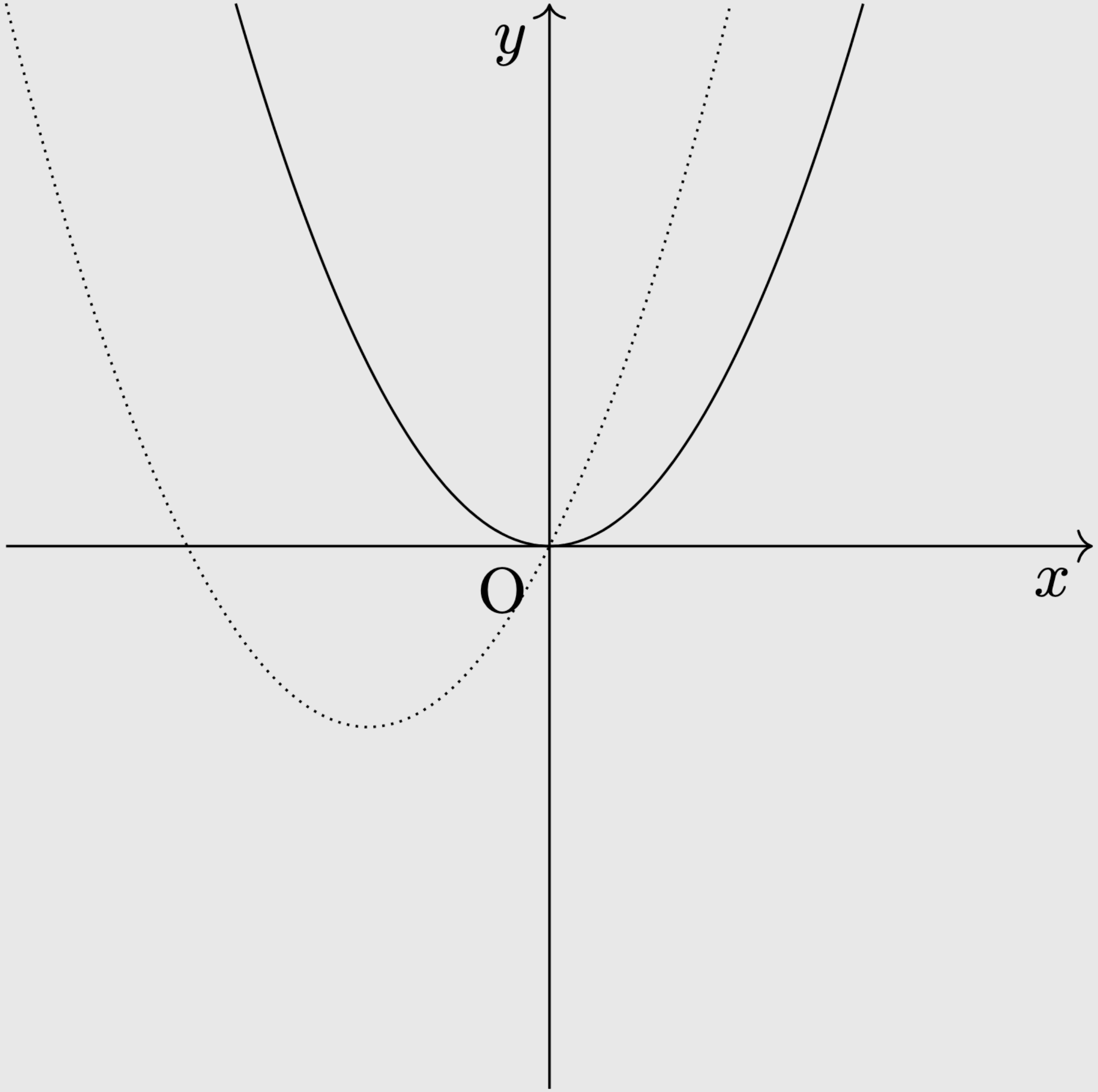
スペース節約のため，
縦ベクトルの表記を使っているけれど，
この記号の意味は大丈夫かしら．



こういうことだよね.



そう．点の平行移動を，
関数のグラフの平行移動に応用することで，
一般の2次関数のグラフを描くことができるわ．



平方完成の重要性が身にしみるのだ.

1.2. 2次関数のグラフ

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

平方完成することで，

放物線の頂点の座標と軸の方程式が得られるわ．

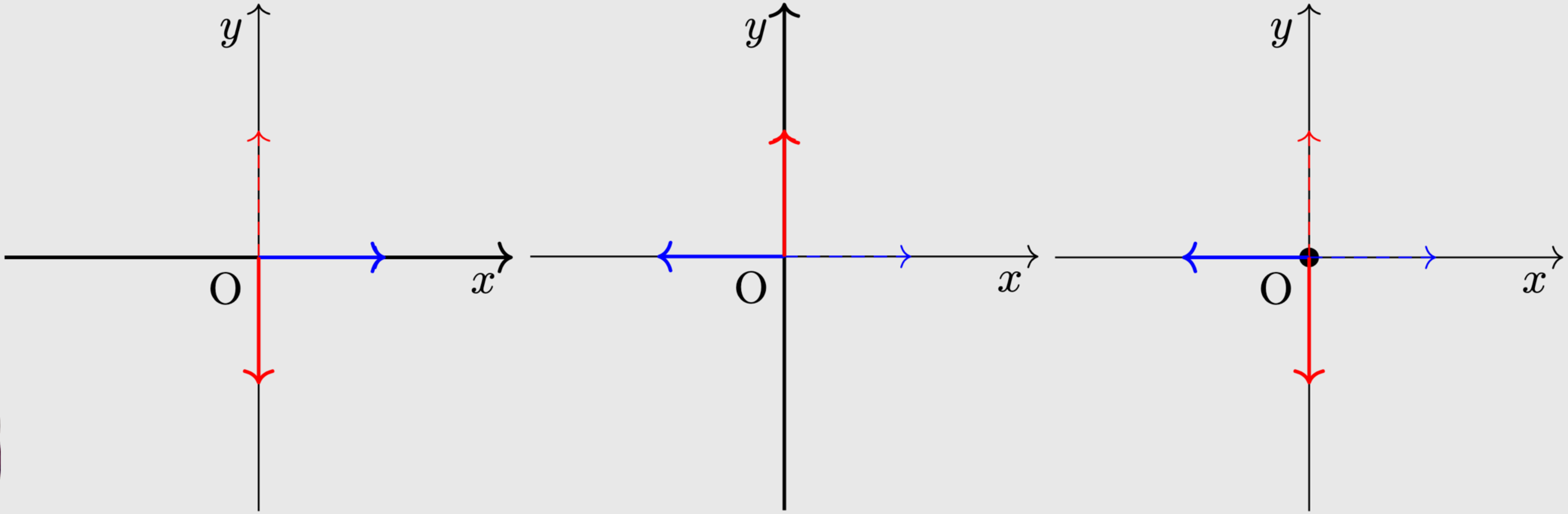
1.2. 2次関数のグラフ

放物線$y = ax^2 + bx + c$を
x軸に関して対称移動して得られる放物線の方程式は

軸に関して対称移動して得られる放物線の方程式は
$y = ax^2 - bx + c$
原点に関して対称移動して得られる放物線の方程式は
$-y = ax^2 - bx + c$

その次に、
放物線の対称移動について解説されているのだ。

1.2. 2次関数のグラフ



線形代数の立場から考えると，
3種類の対称移動は線形変換であり，
このような基底の変化を表しているから，

x軸	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
y軸	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
原点	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

それぞれこのような行列で書けるわ.

x軸	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$
y軸	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$
原点	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$

平面上の点を任意に取ってきて,
さっきの行列を左から掛けることで,

x軸	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$
y軸	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$
原点	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$

対称移動した後の点の座標を得ることができるわ.

1.2. 2次関数のグラフ

ナニヲイッテイルノカサッパリワカラナカッタノダ.

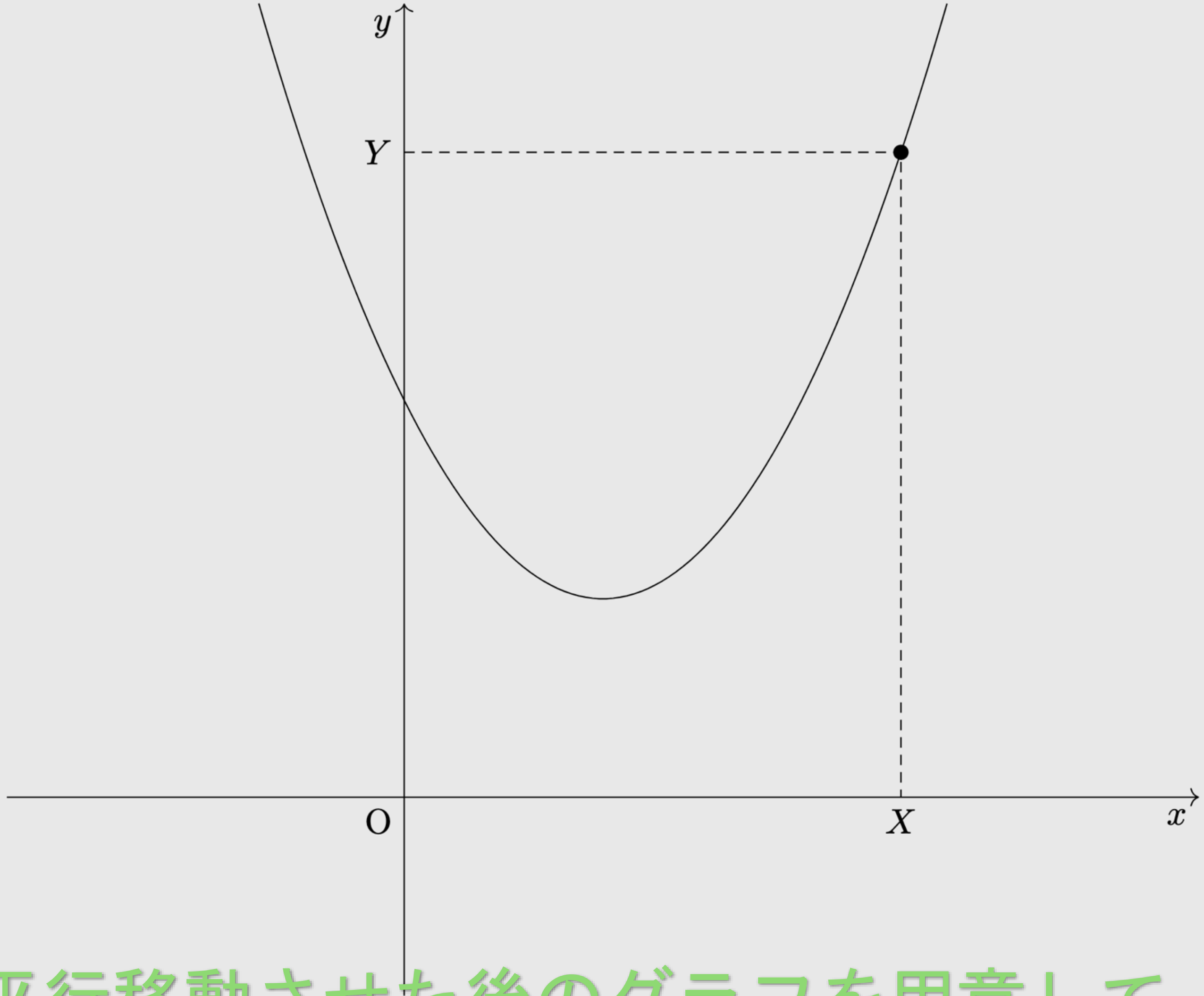
グラフの移動

教科書には，一般の関数のグラフに対して，
平行移動や対称移動をすると
どうなるのかが解説されているわ．

x軸方向にp，y軸方向にqだけ移動

まず，このような平行移動を考えてみるのだ．

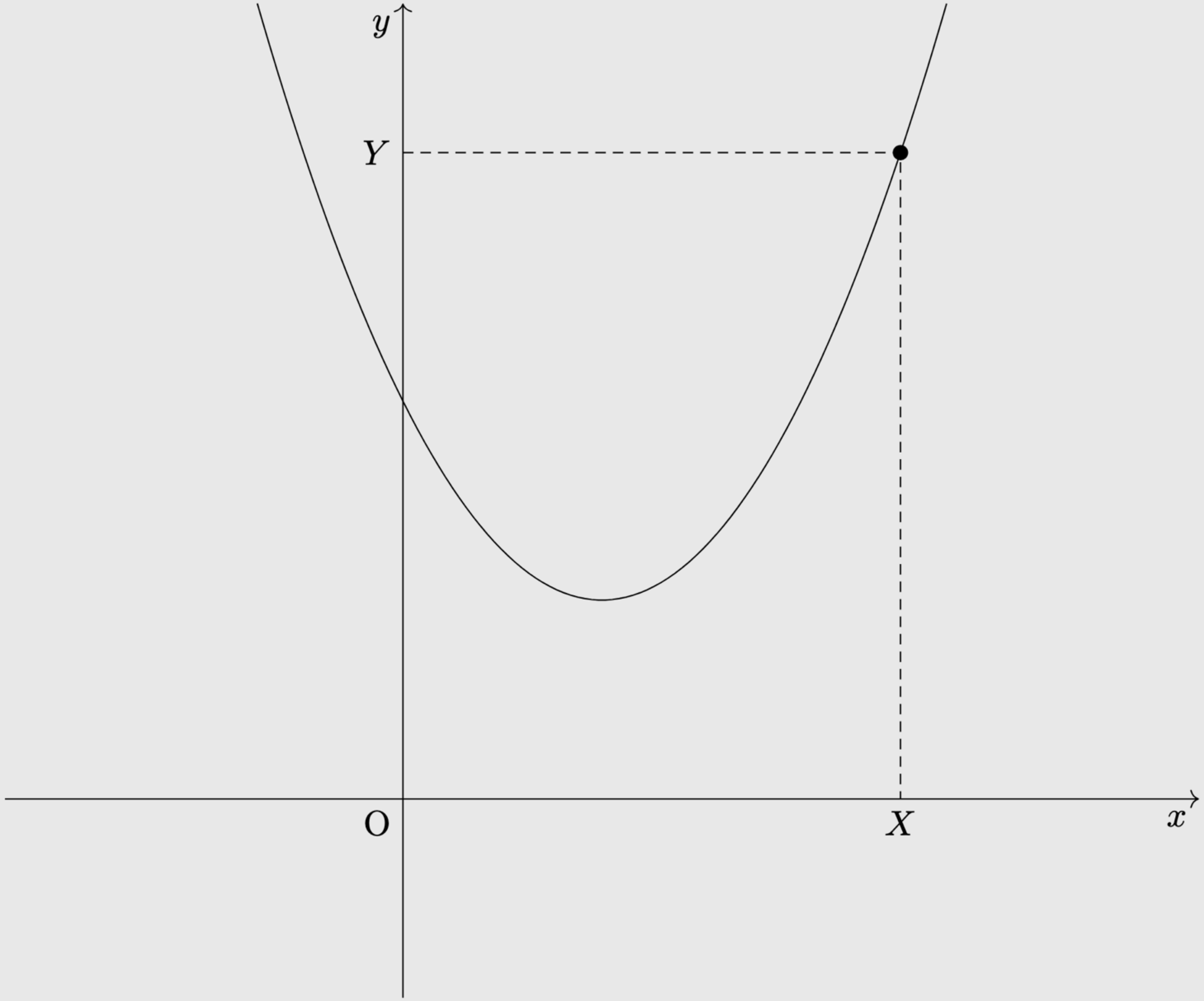
1.2. 2次関数のグラフ



平行移動させた後のグラフを用意して,

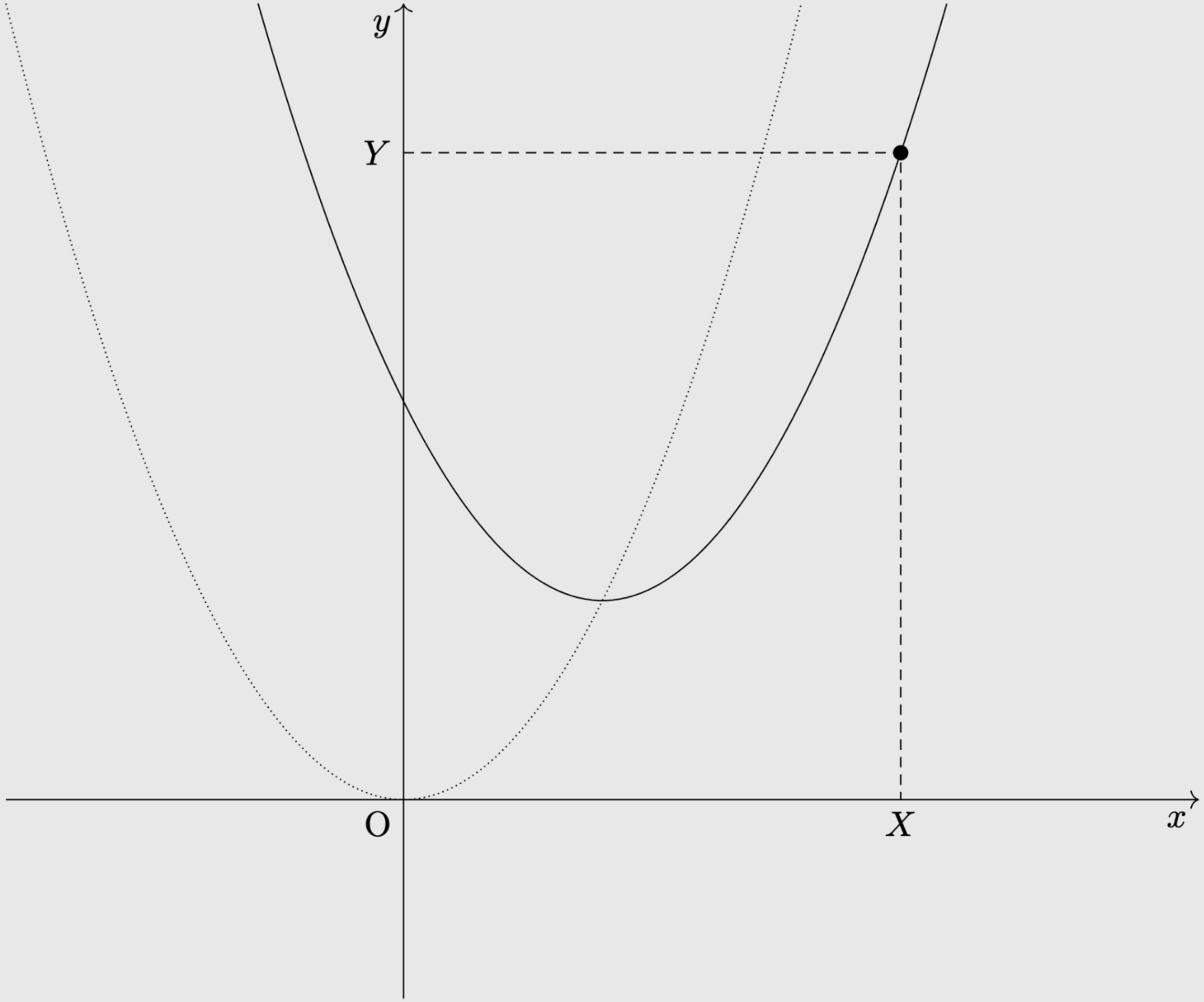
このグラフ上の点を適当に取ったとき,

1.2. 2次関数のグラフ

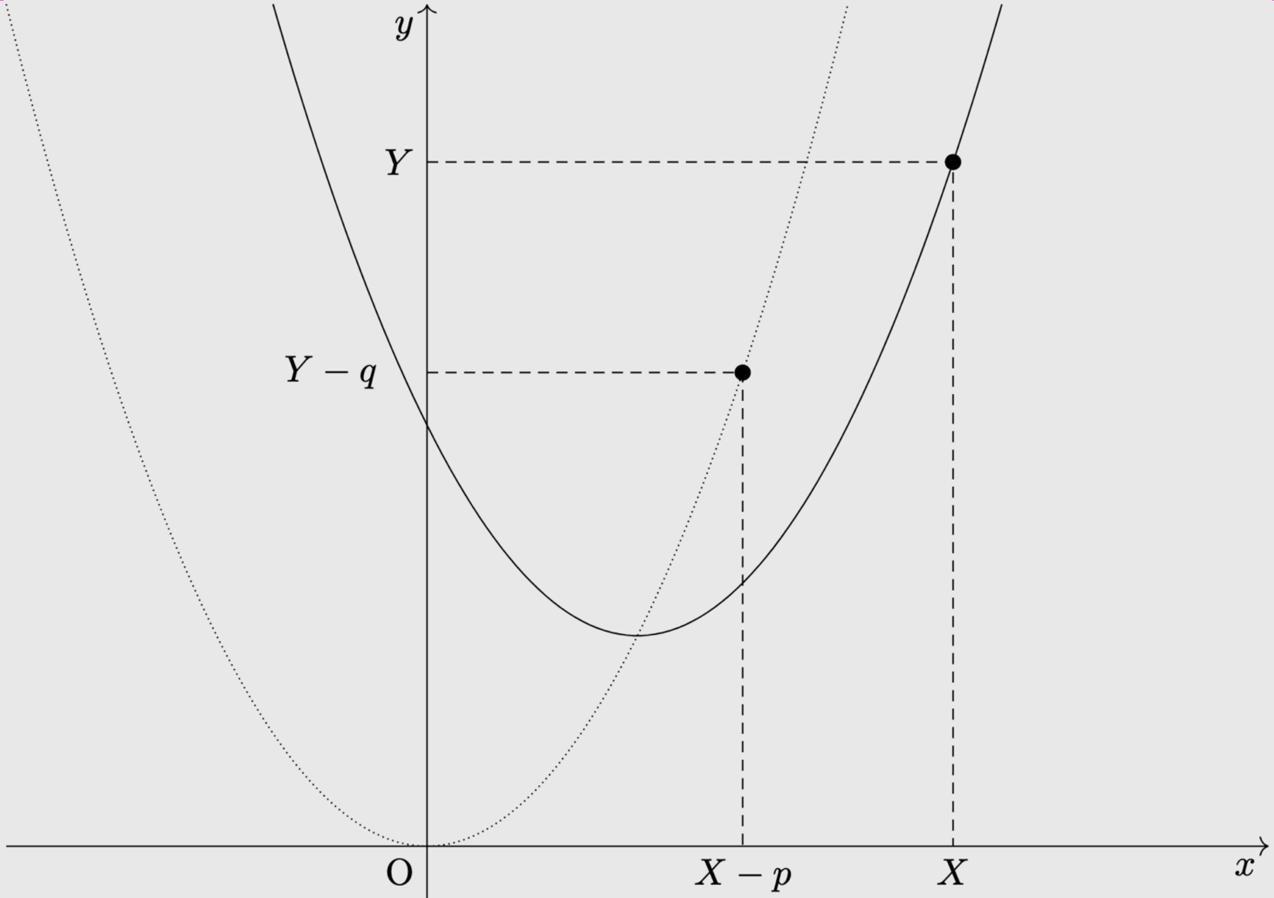


XとYの関係式を作ることが目標なのだ．

1.2. 2次関数のグラフ

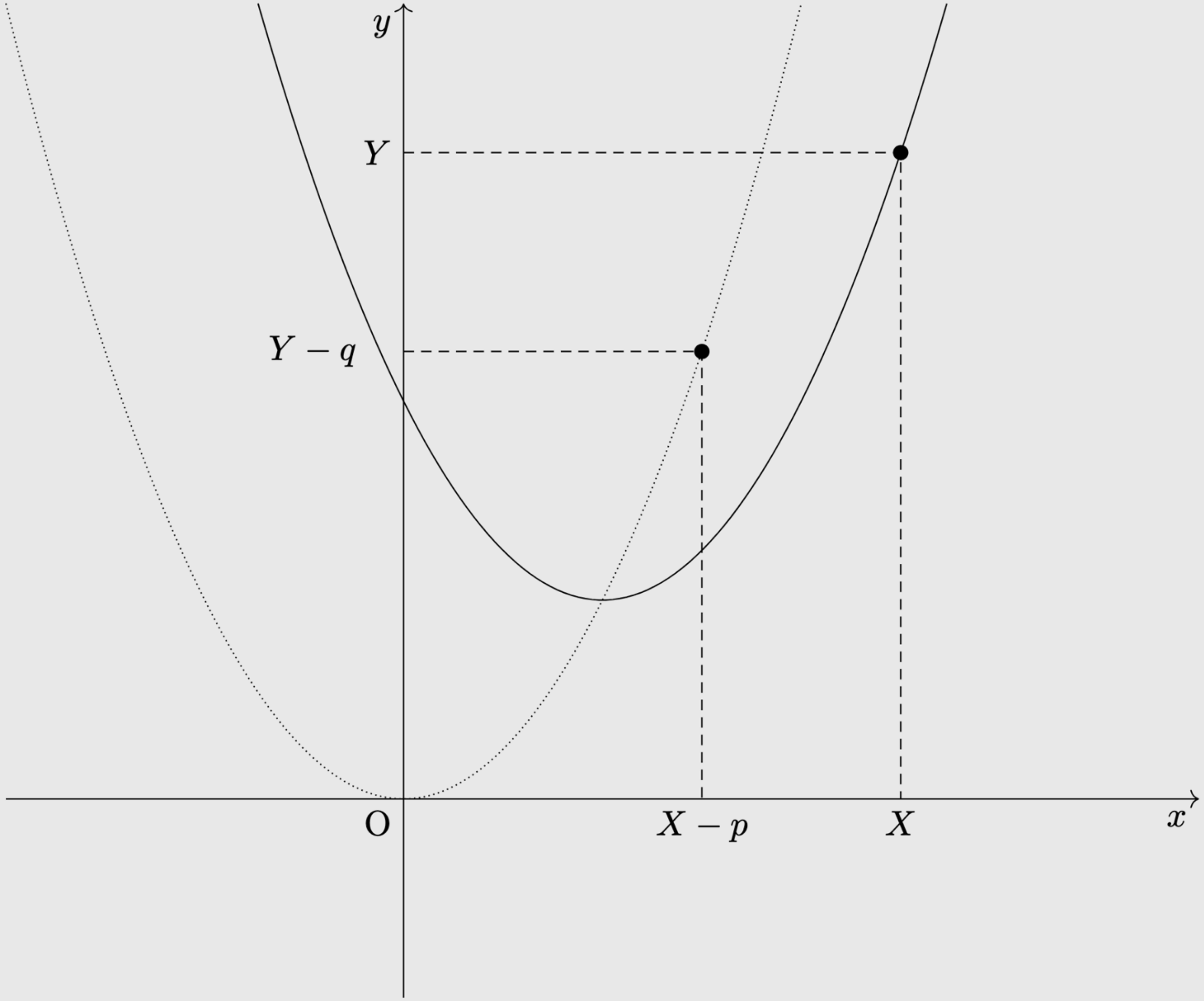


平行移動する前のグラフも用意して，



点の平行移動を思い出すと，
さっきの点の平行移動前の座標を，
XとYで表すことができるのだ．

1.2. 2次関数のグラフ



この点は，$y = f(x)$のグラフ上の点だから，

$$Y - q = f(X - p)$$

この等式が成り立って,

$$y - q = f(x - p)$$

XとYを小文字に置き換えれば,
平行移動した後のグラフの方程式が得られるのだ.

x軸	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
y軸	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
原点	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

その通りよ．対称移動についても，
さっきと同様に，対応する行列を考えて，

1.2. 2次関数のグラフ

x軸	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ f(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ -f(X) \end{pmatrix}$
y軸	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ f(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -X \\ f(X) \end{pmatrix}$
原点	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ f(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -X \\ -f(X) \end{pmatrix}$

行列とベクトルの積を計算すれば，
直ちに得られるわね．

$$-y = f(x)$$

$$y = f(-x)$$

$$-y = f(-x)$$

サッパリスギテケンコウテキナキガシテキタノダ.

1 関数とグラフ

2 2次関数のグラフ

3 2次関数の最大と最小

4 2次関数の決定

3つ目は，2次関数の山場，最大と最小についてなのだ．

1.3. 2次関数の最大と最小

有界閉集合はコンパクトだから
閉区間内で連続関数の最大最小が存在する
と言いたいけど我慢するわ

区間の端点と放物線の頂点に注目すれば解けるわ.
次に進むわよ.

え?それだけ?

1.3. 2次関数の最大と最小

変数分離とかの話をしても良いけれど，
それは受験数学の話をしているに過ぎないし，
他に言うことがないから，次に進むわよ．

1 関数とグラフ

2 2次関数のグラフ

3 2次関数の最大と最小

4 2次関数の決定

分かったのだ.

4つ目は，2次関数の決定について書かれているのだ.

1.4. 2次関数の決定

2次曲線の話がしたいけど
数学Cの範囲だから我慢するわ

条件を元に立式して方程式を解けば係数が求まるわ.
次に進むわよ.

え?これもそれだけ?

3つの文字を含む1次方程式を
組にした連立方程式を
連立3元1次方程式という．

じゃあ，教科書に書いてある
連立3元1次方程式について簡単に補足しておくわ．

1.4. 2次関数の決定

$$
\begin{cases}
a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\
a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\
a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3
\end{cases}
$$

このような連立3元1次方程式を考えてみるわ.

1.4. 2次関数の決定

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{b}}$$

これを行列を用いて表すと，このようになって，

1.4. 2次関数の決定

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1}}_{A^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{b}}$$

係数行列が正則だったら，逆行列を
左から掛けることによって，解が得られるわ．

1.4. 2次関数の決定

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}},\ y = \frac{\det\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}},\ z = \frac{\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}$$

クラメルの公式を使ってもいいわね.

1.4. 2次関数の決定

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}$$

逆行列は，サラスの方法で行列式を出して，

余因子行列を計算したり，簡約化したりすれば求まるわ．

1.4. 2次関数の決定

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{b}}$$

正則でない場合は，解に自由度が残るから，
簡約化して解空間を出せばいいけど，
高校範囲ではなかなか見かけないわね．

1.4. 2次関数の決定

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{b}}$$

ヨケイナコトヲイッテシマッタ，

サッサトツギニイケバヨカッタノダ・・・

2次方程式と2次不等式

5 2次方程式

6 グラフと2次方程式

7 グラフと2次不等式

5つ目は，いよいよ2次方程式なのだ!

$$C_2 \rhd \{e\} \qquad \{e\}$$

2次方程式のガロア群は可解群だから，
代数的に解けるわね．

2.5. 2次方程式

$$C_2 \triangleright \{e\} \qquad \{e\}$$

ガロアグン?カカイグン?ダイスウテキ?

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

要するに，

2次方程式の解の公式が存在するということよ．

2.5. 2次方程式

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

初めからそう言ってほしいのだ.

2.5. 2次方程式

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

教科書には，

1次の係数が偶数のときの公式も載っているのだ．

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

正直，これはただ計算が短縮できるだけで，
あまり必要性を感じないわ．

2.5. 2次方程式

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

数学科としては，

方程式が解ければそれでいいのだけど．

2.5. 2次方程式

$$D = b^2 - 4ac$$

次に，判別式について説明されているのだ．

$$D = b^2 - 4ac$$

判別式は，具体的な解を求めなくとも，
解の情報が得られる，素晴らしい道具ね．

b^2-4acを

2次方程式$ax^2+bx+c=0$の

判別式といい,

普通$\boldsymbol{D}$で表す.

教科書には,判別式がこのように説明されているのだ.

b^2-4acを
2次方程式$ax^2+bx+c=0$の
判別式といい,
普通$\boldsymbol{D}$で表す.

実は，判別式にはもっと一般的な定義があるのよ．

b^2-4acを
2次方程式$ax^2+bx+c=0$の
判別式といい，
普通Dで表す．

もしかして，1次方程式や3次方程式にも，
判別式が存在するの?

$$P = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

その通りよ．まず，n次多項式Pを考えるわ．

2.5. 2次方程式

$$P = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$P(\alpha) = 0$$

根

n次方程式$P(x) = 0$の解を，Pの根といって，...

2.5. 2次方程式

$$P = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

代数学の基本定理より,

Pは複素数上で次のように分解できるわ.

$$P = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$$

ダイスウガクノキホンテイリ?

$$P = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

代数学の基本定理は，いろいろな表現があるけれど，
複素数係数のn次方程式は，重解の重複度を含めて，
ちょうどn個の複素数解を持つという定理よ．

$$P = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

だからPがこのように分解できるのだ.

$$D = a_n^{2n-2} \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$$

そう．このとき，この式をPの判別式というわ．

$$D = a_n^{2n-2} \underset{i<j}{\boxed{\prod}} (\alpha_i - \alpha_j)^2$$

見たことのない記号があるのだ・・・

$$D = a_n^{2n-2} \underset{i<j}{\boxed{\prod}} (\alpha_i - \alpha_j)^2$$

これは，数学Bで出てくるΣの積バージョンで，
円周率でおなじみのギリシャ文字πの大文字よ．

$$D = a_n^{2n-2}\prod_{\boxed{i<j}}(\alpha_i-\alpha_j)^2$$

下に書いてある$i<j$という不等式から，

2.5. 2次方程式

$$D = a_n^{2n-2}\boxed{\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2}$$

この部分は,

$i<j$となるようなすべてのペア(i,j)について,

$$D = a_n^{2n-2} \prod_{i<j} \boxed{(\alpha_i - \alpha_j)^2}$$

この値を掛け合わせた値を表しているわ．

$$P = ax^2 + bx + c$$

ということは，Pが2次多項式だったら，

$$D = a^2(\alpha - \beta)^2$$

Pの判別式はこのようになって、

$$P = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Pが3次多項式だったら，

$$D = a^4(\alpha - \beta)^2(\beta - \gamma)^2(\gamma - \alpha)^2$$

Pの判別式はこのようになるのだ.

$$D = a_n^{2n-2} \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$$

その通りよ．さて，DはPの根の対称式になっているわ．

$$D = a_n^{2n-2} \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$$

対称式は，文字をどんなふうに入れ替えても，
値が変わらない式のことだったのだ．

$$\sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,n\}\\ \sharp I=k}} \prod_{i\in I}\alpha_i \quad (1\le k\le n)$$

対称式の基本定理より,

DはPの根の基本対称式を用いて表すことができるわ.

$$D = a^4(s_1^2 s_2^2 - 4s_2^3 - 4s_1^3 s_3 - 27s_3^2 + 18s_1 s_2 s_3)$$

$$s_1 = \alpha + \beta + \gamma$$

$$s_2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$$

$$s_3 = \alpha\beta\gamma$$

Pが3次多項式だったら，こんな感じなのだ.

$$(-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n} = \sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n\} \\ \sharp I = k}} \prod_{i \in I} \alpha_i \quad (1 \leq k \leq n)$$

これらの式は，根と係数の関係より，
Pの係数を用いて表すことができるわ．

$$D = b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2 + 18abcd$$

Pが3次多項式だったら，こんな感じなのだ．

$$D=\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{a_n}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & & \text{\Large 0} \\ & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ na_n & \cdots & 2a_2 & a_1 & & & \text{\Large 0} \\ & \ddots & & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & na_n & \cdots & 2a_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

一般の場合は，このようになるわね．

$$D = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{a_n} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ na_n & \cdots & 2a_2 & a_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & na_n & \cdots & 2a_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

ナンジャコリャー!

2.5. 2次方程式

$$D = b^2 - 4ac$$

つまり，教科書にある2次方程式の判別式というのは，

2.5. 2次方程式

$$P = ax^2 + bx + c$$

このような2次多項式について，

$$
\begin{aligned}
D &= a^2(\alpha - \beta)^2 \\
&= a^2\{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\} \\
&= a^2\left\{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4 \cdot \frac{c}{a}\right\} \\
&= b^2 - 4ac
\end{aligned}
$$

その判別式を，係数だけを用いて表したものになるわ．

↓分数式にならないように掛けられている

$$D = \boxed{a_n^{2n-2}} \prod_{i<j} \boxed{(\alpha_i - \alpha_j)^2}$$

元々の定義を思い出すと，Pが重根を持つとき，
Dの値は0になり，そうでないとき，
Dの値は0にならないことが分かるわ．

$$P(x) = 0 \quad \cdots\cdots(*)$$

$$D = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (*)\text{は重解を持つ}$$
$$D \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (*)\text{は重解を持たない}$$

つまり，こういうことよ．

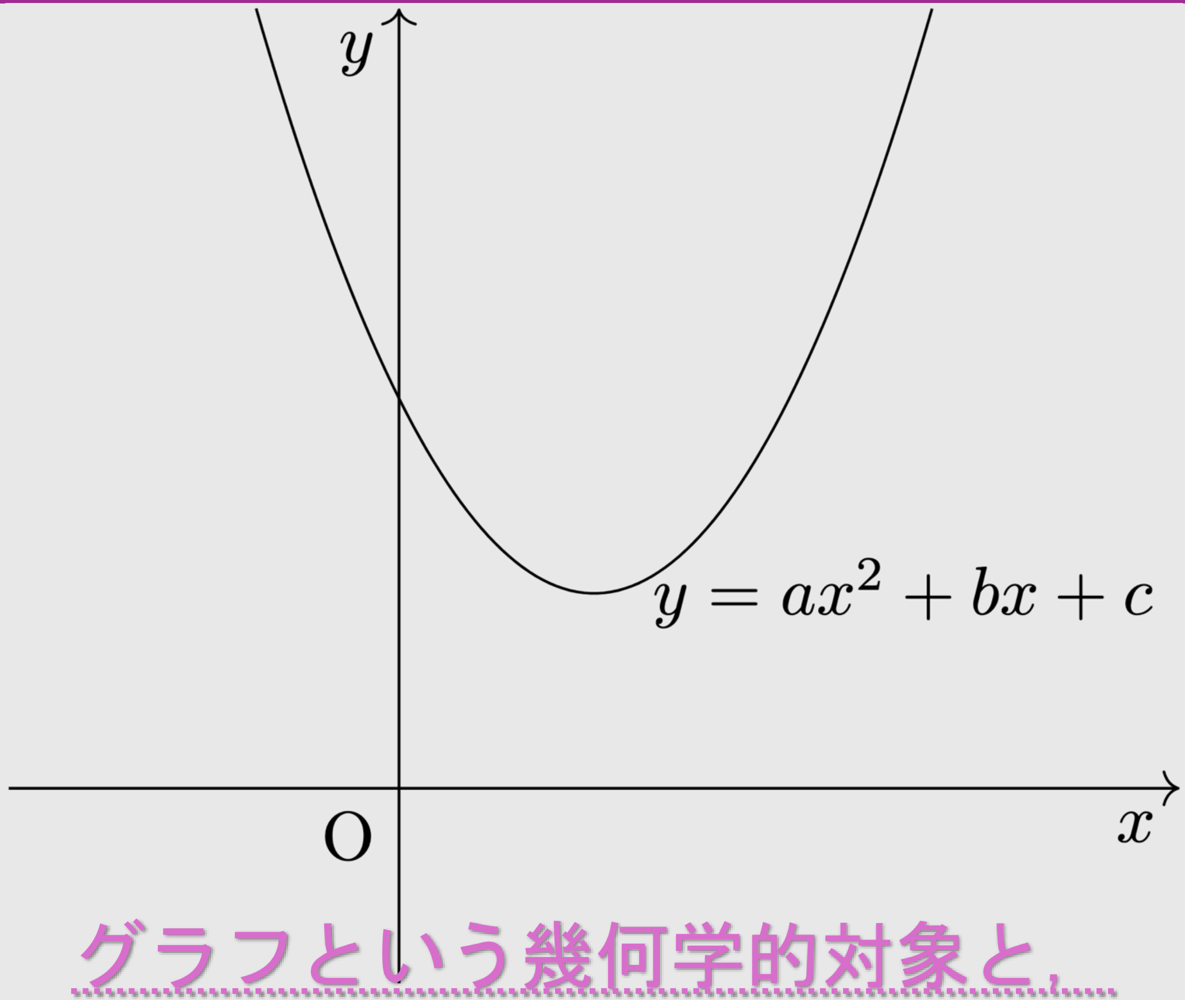
$$P(x) = 0 \quad \cdots\cdots (*)$$

$$D = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (*)\text{は重解を持つ}$$
$$D \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (*)\text{は重解を持たない}$$

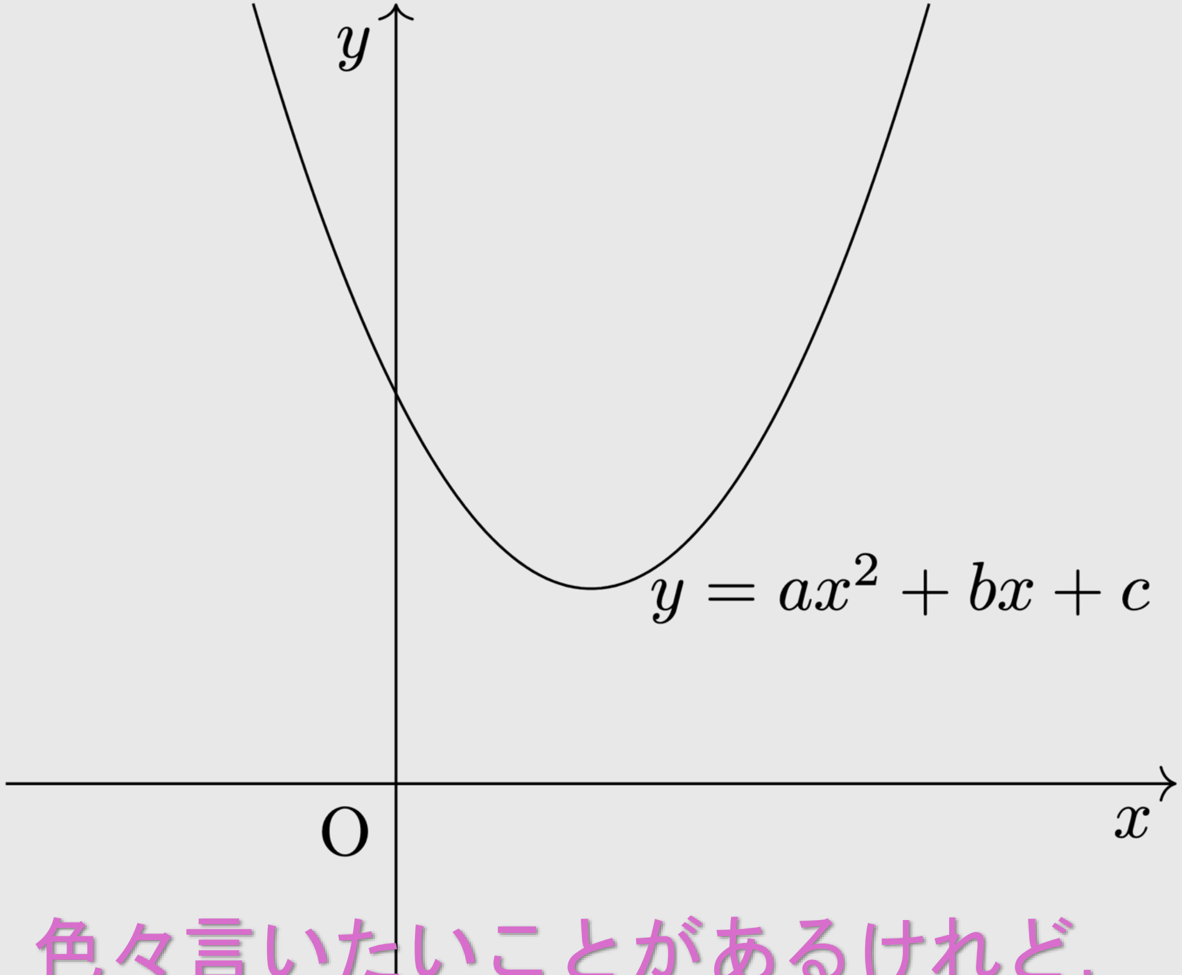
判別式への理解が，かなり深まったのだ．

6つ目は，2次関数のグラフと，
2次方程式の関係について述べられているのだ．

2.6. グラフと2次方程式

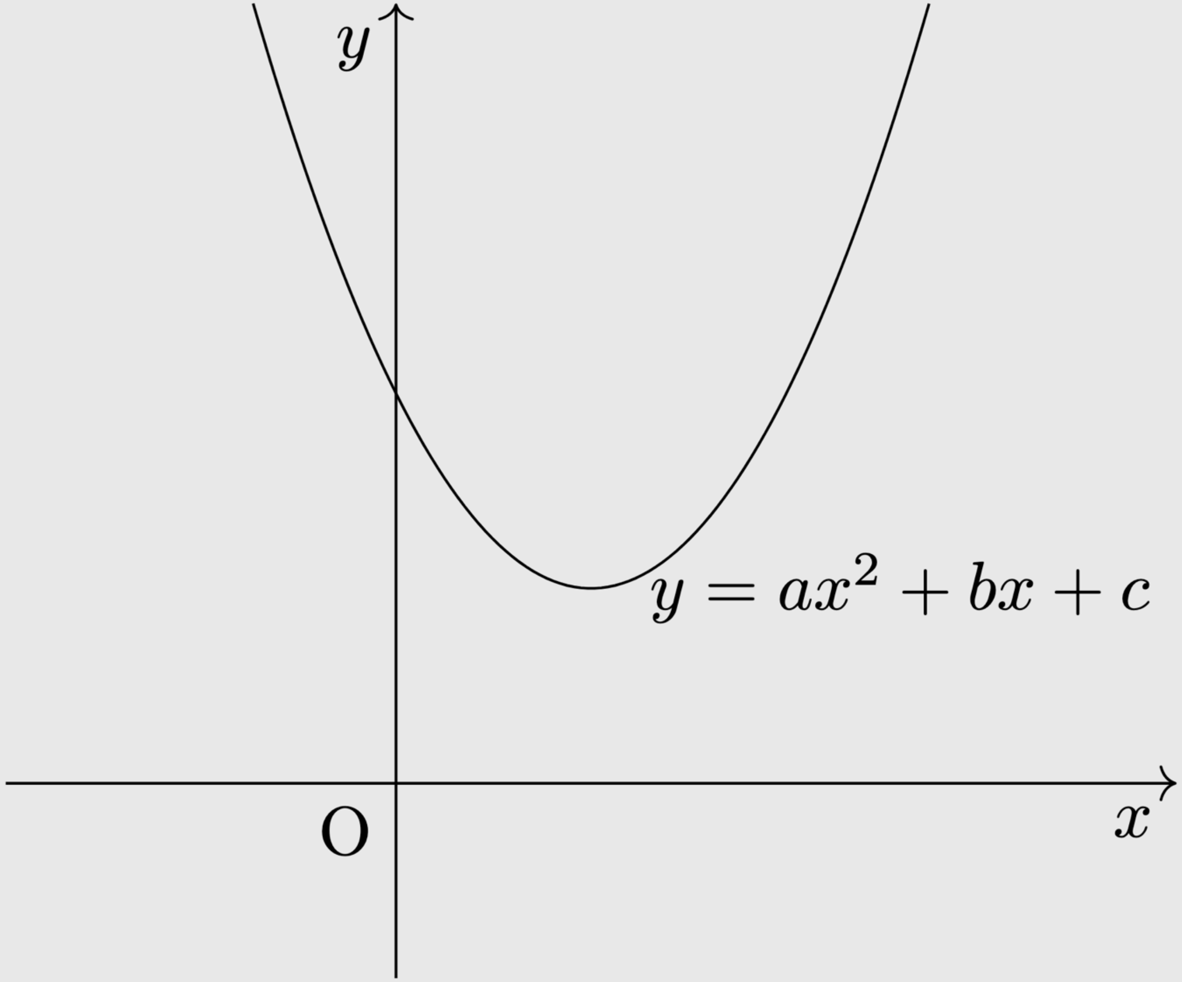


グラフという幾何学的対象と，
方程式という代数学的対象の間の関係が
明らかになるのは，とても面白いわね．



色々言いたいことがあるけれど，
数学IIの「図形と方程式」のために，
ここは我慢して，次に進むわ．

2.6. グラフと2次方程式



今回は余計なことは言わず，
お望み通り次に進みたいと思うのだ．

5 2次方程式
6 グラフと2次方程式
7 グラフと2次不等式

最後の7つ目は，いよいよ2次不等式の登場なのだ．

2.7. グラフと2次不等式

不等式については，
グラフをイメージすることがかなり重要よ．

2.7. グラフと2次不等式

※$a > 0$の場合

判別式の符号	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$ax^2 + bx + c = 0$ の実数解	異なる2つの実数解 $x = \alpha, \beta\ (\alpha < \beta)$	重解 (ただ1つの実数解) $x = \alpha$	実数解はない
$ax^2 + bx + c > 0$ の解	$x < \alpha, \beta < x$	α以外のすべての実数	すべての実数
$ax^2 + bx + c \geqq 0$ の解	$x \leqq \alpha, \beta \leqq x$	すべての実数	すべての実数
$ax^2 + bx + c < 0$ の解	$\alpha < x < \beta$	解はない	解はない
$ax^2 + bx + c \leqq 0$ の解	$\alpha \leqq x \leqq \beta$	$x = \alpha$	解はない

教科書になぜか載っている、
全パターンをまとめた表を覚える必要なんてないのだ.

※$a > 0$の場合

判別式の符号	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$ax^2 + bx + c = 0$ の実数解	異なる2つの実数解 $x = \alpha, \beta \ (\alpha < \beta)$	重解 (ただ1つの実数解) $x = \alpha$	実数解はない
$ax^2 + bx + c > 0$ の解	$x < \alpha, \beta < x$	α以外のすべての実数	すべての実数
$ax^2 + bx + c \geqq 0$ の解	$x \leqq \alpha, \beta \leqq x$	すべての実数	すべての実数
$ax^2 + bx + c < 0$ の解	$\alpha < x < \beta$	解はない	解はない
$ax^2 + bx + c \leqq 0$ の解	$\alpha \leqq x \leqq \beta$	$x = \alpha$	解はない

本当にその通りよ.

次回
「図形と計量」編

今回の動画はここまでなのだ.

次回は「図形と計量」について読んでいこうと思うのだ!

次回
「図形と計量」編

今回はかなり内容に偏りがある動画になってしまったわね.

次回
「図形と計量」編

ちなみに，次回はどんな感じになりそうなのだ?

次回
「図形と計量」編

数学IIで「三角関数」を扱うことを考えると，……
三角比についてあれこれ文句をつけるのは憚られるから，……

次回
「図形と計量」編

後半の図形への応用パートに期待してほしいわね.

次回
「図形と計量」編

図形ということは，編集が大変そうなのだ．

次回
「図形と計量」編

そんなのは，視聴者と同じく，知ったこっちゃないわ．

MathAbyssでは，数学に関する記事を公開しているWebサイト
「MathAbyss」を運営しております．

今後も様々な動画を制作していきますので，
この動画に対する高評価，YouTubeのチャンネル登録を
よろしくお願いします！

各種SNS等のフォローもしていただけると励みになります！

最後までご視聴いただき，ありがとうございました！！！

MathAbyss

ご視聴ありがとうございました！
チャンネル登録よろしくお願いします！