$$\infty$$

皆さんは，「無限」に対して，どのようなイメージをお持ちでしょうか．

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \cdots\cdots$

「限りなく大きい」などの直感を持たれている方がほとんどだと思いますが，

$$\infty$$

数学の世界では，「無限」を慎重に取り扱わなければなりません．

※この等式はリーマンゼータ関数の解析接続を考えることで「正しいと解釈できなくもない」式です

$$1+2+3+\cdots=-\frac{1}{12}$$

「無限」にきちんと向き合うと，
直感に反する結果が得られることがあります．

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=???$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{5}}\times\cdots=???$$

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\sqrt{2}}}}}}=???$$

この動画では，四則演算などの身近な計算を，
無限回行うとどうなるのかについて，詳しく解説していきます．

MathAbyss

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}=???$$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots}}}=???$$

算数や中学数学で扱う内容が，無限の世界ではどう化けるのか，

その壮大な世界を，お楽しみください．

MathAbyss

MathAbyss

無限回計算する数学の世界

この動画は，7つのチャプターによって構成されています．

1.イントロダクション
2.無限回の足し算
3.無限回の掛け算
4.無限回の冪乗
5.無限回の冪根
6.無限回の分数計算
7.まとめ

足し算，掛け算，冪乗，冪根，分数計算について，

無限回繰り返す先に広がる，豊かな数学の世界を紹介します．

2. 無限回の足し算

2. 無限回の足し算

1.無限級数とは
2.収束判定法
3.関数項級数
4.冪級数

2. 無限回の足し算

1.無限級数とは
2.収束判定法
3.関数項級数
4.冪級数

最初に，足し算を無限回行うとどうなるのかについて，考えてみましょう．

無限級数とは

まずは，無限回の足し算を，どのように定義するのかについて説明します．

$$a_1, a_2, a_3, \cdots$$

数列を考えます．数列は，数のリストに番号を割り振ったものです．

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

このとき，数列の1番目の数から，n番目の数までを足し合わせたものを，
このように表します．

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

これは有限個の数の和であることに注意してください。

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

これを第n部分和といいます．

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k\right\}_{n=1}^{\infty}$$

この第n部分和を使って，新たな数列を構成することができます．

この数列を無限級数といいます．

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = \alpha$$

この数列がある値に収束する，すなわちnを限りなく大きくしたときに，
第n部分和の値がある値に限りなく近づくとき，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = \alpha$$

無限級数はこの値に収束する，といいます．

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

無限級数や，無限級数の値は，
ともに同じ記号を使って，このように表します．

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

本来は別の記号を用意するべきですが，

文脈上区別できることが多いため，同じ表記が用いられています．

$$a_n = r^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N})$$
$$(-1 < r < 1)$$

具体例を見ていきましょう．このような数列を考えます．

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$$

この数列の部分和は，このように計算することができ，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1-r}=\frac{1}{1-r}$$

nについて極限をとると，このような値をとることが分かります．

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = \frac{1}{1-r}$$

したがって，無限級数の値が得られます．

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = \frac{1}{1-r}$$

ちなみに，ここまでの内容は，高校数学でも扱われています．

収束判定法

無限級数は，収束するとは限らないため，
収束性を調べる方法があれば便利です．

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

収束する無限級数が与えられたとき，元の数列の極限について考えると，

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

このようになり，0に収束することが分かります．

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{は発散する}$$

対偶をとると，0に収束しない数列の級数は，発散することが分かります．

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{は収束する}$$

ただし，逆は成り立ちません．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

例えば，この無限級数が反例となります．

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

また，無限級数が与えられたとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{が収束する}$$

絶対値をつけた級数が収束するならば，

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{が収束する}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{は収束する}$$

元の級数も収束することが分かっています．

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{が収束する}}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{は収束する}$$

このとき，この無限級数は絶対収束するといいます．

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{が収束する}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{は収束する}$$

ちなみに，これについても，逆は成り立ちませんので，注意してください．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2$$

反例はこちらです．

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{は収束する}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{は発散する}$$

収束するが絶対収束しない級数は，条件収束するといいます．

リーマンの再配列定理

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$が条件収束するとき

任意の$\alpha \in [-\infty, \infty]$に対して

ある全単射$\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$が存在して

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)} = \alpha$となる.

実は，条件収束する級数は，

和の順序を交換すると，任意の値に収束させることができ，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{が絶対収束するとき}$$

任意の全単射$\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{となる.}$$

絶対収束する級数は，

和の順序を交換しても，極限値が変わらないことが知られています．

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{が収束する}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{は収束する}$$

さて，以上の議論により，

無限級数の絶対収束性は非常に良い性質であることが分かるので，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n \geq 0)$$

すべての項が0以上である無限級数，
すなわち正項級数について考えていきましょう．

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n \geq 0)$$

正項級数の収束判定法として，代表的なものを紹介しましょう．

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$$

別の収束する正項級数が存在して，

$$(0 \leq) a_n \leq b_n$$

級数の各項について，このような不等式が成立するとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

この正項級数は収束します．これを比較判定法といいます．

$$0 \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{は絶対収束}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{は発散}$$

他にも，n乗根の極限値を調べることによって判定する，

コーシーの判定法や，

$$0 \leq \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{は絶対収束}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{は発散}$$

隣り合う項の比の極限値を調べることによって判定する，

ダランベールの判定法，

$$^{\exists}f : [1,\infty) \to [0,\infty) : \text{単調減少関数 s.t.}\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = a_n$$
$$\Downarrow$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{が収束する} \iff \int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{が収束する}$$

広義積分を計算することによって判定する，
積分判定法などが知られています．

関数項級数

ここまでは，数列の無限和について考えてきましたが，
関数列の和を考えると，どのようになるでしょうか．

$$f_1, f_2, f_3, \cdots$$

関数列とは，関数のリストに番号を割り振ったものです．

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$$

xの値を固定すると，これは数列とみなすことができます．

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

よって，無限級数を考えることができます．

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

これを$f(x)$と書くことにすると，これはxの関数とみなすことができます．

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

このとき，fを関数項級数といいます．

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

さて，関数項級数の収束について考えてみましょう．

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

各xに対して，xを固定したこの無限級数が収束するとき，

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

関数項級数は各点収束するといいます．

$$
{}^{\forall}\varepsilon > 0,\ {}^{\forall}x \in \mathbb{R},\ {}^{\exists}N \in \mathbb{N}\,\mathrm{s.t.}\ {}^{\forall}n \geq N,
$$

$$
\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - f_0(x)\right| < \varepsilon
$$

$(f_0(x)$は極限値$)$

より厳密には，このように定義されます．

$$^\forall\varepsilon > 0,\ ^\exists N \in \mathbb{N}\ \mathrm{s.t.}\ ^\forall x \in \mathbb{R},\ ^\forall n \geq N,$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - f_0(x)\right| < \varepsilon$$

$$(f_0(x)\text{は極限値})$$

このNがxの値に関わらず固定できるとき，

$$
{}^{\forall}\varepsilon > 0,\ {}^{\exists}N \in \mathbb{N}\ \text{s.t.}\ {}^{\forall}x \in \mathbb{R},\ {}^{\forall}n \geq N,
$$

$$
\left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - f_0(x) \right| < \varepsilon
$$

$$
(f_0(x)\text{は極限値})
$$

関数項級数は一様収束するといいます．

$$
{}^{\forall}\varepsilon > 0,\ {}^{\exists}N \in \mathbb{N}\,\text{s.t.}\ {}^{\forall}x \in \mathbb{R},\ {}^{\forall}n \geq N,
$$

$$
\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - f_0(x)\right| < \varepsilon
$$

$$
(f_0(x)\text{は極限値})
$$

一様収束の直感的な意味は，どのxの値についても，
この無限級数の収束スピードが同じくらいということです．

一様収束

各点収束するが一様収束しない

アニメーションにするとこのようになります．

冪級数

この一様収束性が非常に重要になるのですが，
その前に，冪級数について解説しましょう．

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

冪級数は，このような形で書ける関数項級数を指します．

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

議論を簡単にするため，$a=0$の場合について考えましょう．

$$x = 0$$

$$-r < x < r$$

(↑等号が成り立つ場合がある)

$$-\infty < x < \infty$$

冪級数が収束するようなxの範囲は，
これらのいずれかになることが分かり，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \cdots\cdots(*) \quad \text{の収束半径} r$$

$$r = 0 \iff (*)\text{は任意の}x \neq 0\text{で発散}$$

$$0 < r < \infty \iff (*)\text{は}|x| < r\text{で絶対収束}$$

$$|x| > r\text{で発散}$$

$$r = \infty \iff (*)\text{は任意の}x \in \mathbb{R}\text{で収束}$$

このとき，冪級数の収束半径を定義することができます．

※ただし$\dfrac{1}{\infty}=0, \dfrac{1}{0}=\infty$

$$r=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

冪級数の収束半径は，コーシー･アダマールの公式や，

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

ダランベールの公式などによって，求めることができます．

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

この冪級数は，収束範囲の中の閉区間上で，一様収束します．

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

冪級数は，項別微分や項別積分が可能です．

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

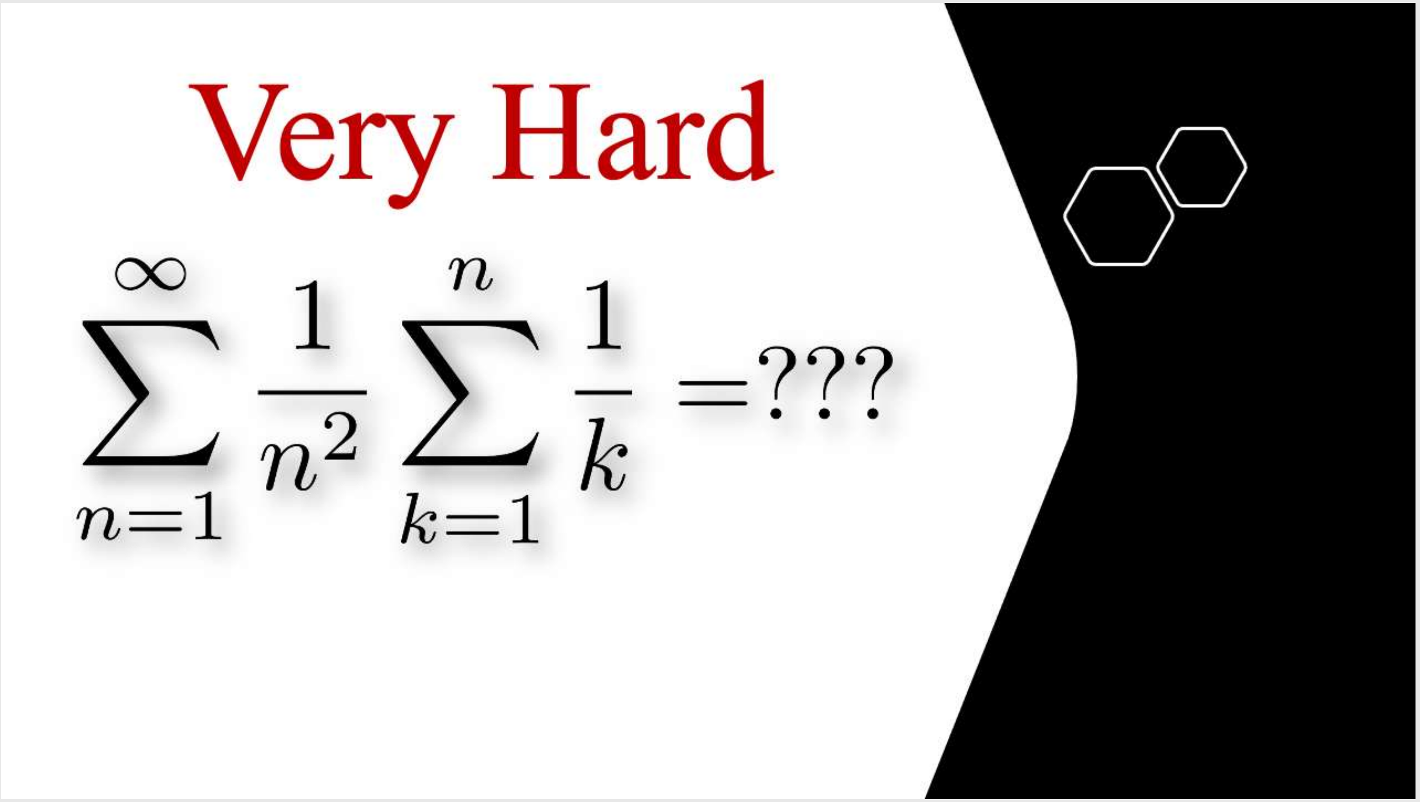
$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

つまり，和と微積分の順序を入れ替えることができるのです．

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

これは一般には成り立たないことに注意してください．



こちらの動画では，今回解説した内容をベースとして，
具体的な級数の値を求めていますので，ぜひご覧ください!

2. 無限回の足し算

1.無限級数とは
2.収束判定法
3.関数項級数
4.冪級数

無限級数については，大学の微積分で扱われることが多いです．
複素数上でも，ほとんど同様の主張が成り立ちます．

MathAbyss

3. 無限回の掛け算

3. 無限回の掛け算

3. 無限回の掛け算

1.無限積とは
2.ワイエルシュトラスの因数分解定理
3.オイラー積
4.ウォリスの公式

2つ目は，
掛け算を無限回行うとどうなるのかについて，考えてみましょう．

無限積とは

無限積の定義から始めましょう．

$$a_1, a_2, a_3, \cdots,$$

先程と同様に，数列を考えます．

$$a_1, a_2, a_3, \cdots,$$

無限級数の場合は，部分和の極限として定義しましたが，
積の場合は少し事情が異なります．

$$a_1, a_2, a_3, \cdots,$$

$$\cdots, \underbrace{a_N, a_{N+1}, \cdots}_{\neq 0}$$

この数列が，有限個の項を除いて0でない，
すなわち，十分大きい正の整数Nをとることで，
第N項以降の項がすべて0でないようにできるとき，

$$\left\{\prod_{k=N}^{n} a_k\right\}_{n=N}^{\infty}$$

$$\prod_{k=N}^{n} a_k = a_N a_{N+1} \cdots a_n$$

第N項から第n項までのすべての積によって，新たな数列を構成します．

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=N}^{n} a_k = \alpha \neq 0$$

この数列がある0でない値に収束するとき，

$$\prod_{k=N}^{\infty} a_k = \alpha$$

無限積は収束するといい，このように表します．

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha \prod_{k=1}^{N-1} a_k$$

特に，この等式が成り立ちます．

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n$$

また，収束する無限積が与えられたとき，
元の数列の極限について考えると，

$$a_n = \prod_{k=1}^{n} a_k \Bigg/ \prod_{k=1}^{n-1} a_k \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

このようになり，1に収束することが分かります．

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$$

そのため，このような無限積を考えると，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

元の数列の極限は0に収束します．

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)\text{が絶対収束} \iff \prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)\text{が収束}$$

さて，無限積についても，無限級数と同様に，
絶対収束の概念を定義することができます．

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)\text{が絶対収束}$$

$$\Downarrow$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)\text{は収束}$$

絶対収束する無限積が収束することは，無限級数の場合と同様です．

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) \text{が絶対収束}$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \text{が絶対収束}$$

そして，無限積の絶対収束性は，

無限級数の絶対収束性に言い換えることができるのです．

ワイエルシュトラスの因数分解定理

ここで，話を大きく変えましょう．

バーゼル問題

皆さんは，バーゼル問題をご存知でしょうか．

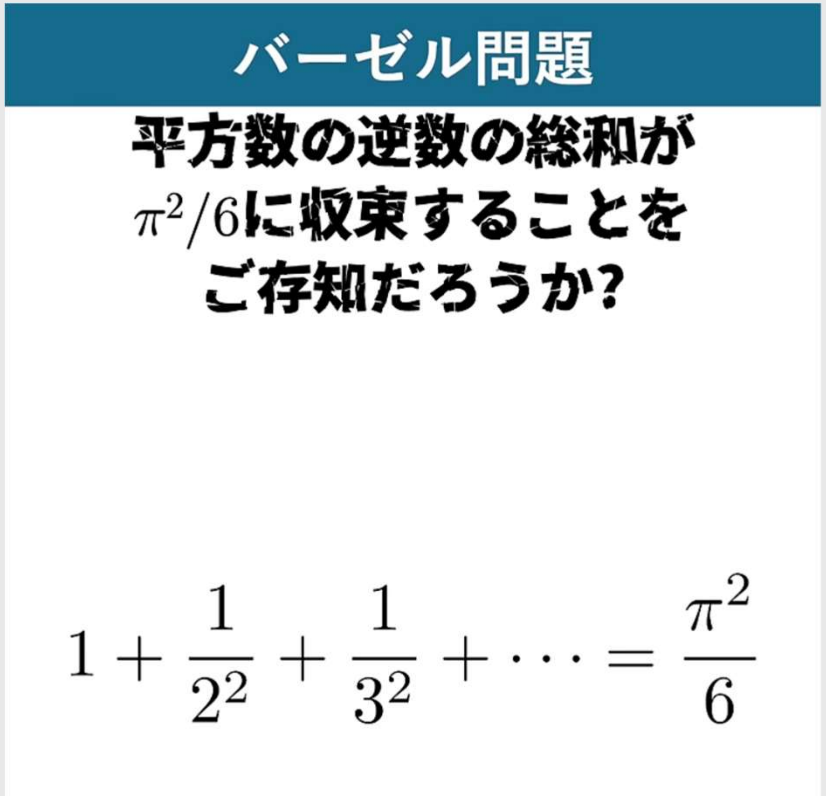
バーゼル問題

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = ???$$

バーゼル問題とは，この無限級数の値を求める問題であり，

Leonhard Euler
(1707-1783)

オイラーによって初めて解かれました．



バーゼル問題の詳細については，こちらの動画で詳しく解説しています!

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right)$$

さて，オイラーによる解法では，
三角関数の無限積による表示が登場します．

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right)$$

当時は，この無限積表示が正しいものかどうかは分かっていませんでした．

ワイエルシュトラスの因数分解定理

整関数fの0でない零点を重複度を含めて$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$とし
$f(0) \neq 0$のとき$m=0$，$f(0)=0$のときmを零点0の位数とする
このとき，ある非負整数列$\{p_n\}$と
ある整関数gが存在して，次の式が成り立つ．

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{\alpha_n}\right)$$

その正当性を与えるのが，ワイエルシュトラスの因数分解定理です．

ワイエルシュトラスの因数分解定理

整関数fの0でない零点を重複度を含めて$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$とし
$f(0) \neq 0$のとき$m=0$，$f(0)=0$のときmを零点0の位数とする
このとき，ある非負整数列$\{p_n\}$と
ある整関数gが存在して，次の式が成り立つ．

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{\alpha_n}\right)$$

定理の内容に入る前に，複素関数について，簡単に説明しておきます．

D : $\mathbb{C}$上の領域(連結開集合)

$$f : D \to \mathbb{C}$$

複素数の領域から複素数への関数を考えましょう.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

複素関数が領域上で正則であるとは，
この極限が複素数上で定まることをいいます．

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

要するに，実関数の微分の拡張です．

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\text{が整関数} \iff f\text{は}\mathbb{C}\text{上正則}$$

複素数全体で正則である関数は，整関数といいます．

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

例えば，このように定義される複素指数関数は，整関数になります．

$$z\text{が}f\text{の零点} \iff f(z) = 0$$

また，複素関数の値が0になるような点を，その関数の零点といいます．

zがfのn位の零点

$$\Longleftrightarrow f^{(k)}(z)=0 \text{かつ} f^{(n)}(z)\neq 0$$

$$(k=0,1,2,\ldots,n-1)$$

特にzがfのn位の零点であるとは，
zがfのn階未満のすべての導関数の零点であり，
fのn階導関数の零点でないことをいいます．

zの位数

zがfの$\boxed{n}$位の零点

$$\Longleftrightarrow f^{(k)}(z)=0 \text{かつ} f^{(n)}(z)\neq 0$$

$$(k=0,1,2,\ldots,n-1)$$

このとき，nをfの零点zの位数といいます．

$$E_n(z) = \begin{cases} 1 - z & (n = 0) \\ (1 - z)\exp\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k}\right) & (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

さて，各非負整数に対して，このような複素関数を考えましょう．

$$E_n(z) = \begin{cases} 1 - z & (n = 0) \\ (1 - z)\exp\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k}\right) & (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

この関数は，ワイエルシュトラスの基本因子などと呼ばれています．

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots : f の \underline{0でない}零点$$

※↑もちろん有限個の可能性もあります

整関数fの0でない零点が，重複度を含めてこのように書けるとします．

$$m = \begin{cases} (\text{零点}0\text{の位数}) & (f(0) = 0) \\ 0 & (f(0) \neq 0) \end{cases}$$

また，0がfの零点であるとき，mを零点0の位数とし，
0がfの零点でないとき，$m = 0$とします．

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{\alpha_n}\right)$$

このとき，ある整関数gとある非負整数列$\{p_n\}$が存在して，
この等式が成り立ちます．

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{\alpha_n}\right)$$

これがワイエルシュトラスの因数分解定理です．

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

例えば，複素正弦関数は整関数であり，

$$g(z) = 0$$

$$p_n = 0 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

整関数gと整数列$\{p_n\}$を，このように定めることで，

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{n\pi}\right)$$

ワイエルシュトラスの因数分解定理より，無限積表示が与えられます．

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right)$$

これにより，
オイラーが求めたバーゼル問題の解の正当性が保証されるのです．

オイラー積

引き続き，オイラーの話題を紹介しましょう．

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

バーゼル問題に登場する無限級数は，
リーマンゼータ関数へと一般化されます．

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

このゼータ関数は，複素指数関数を考えることによって，
定義域を複素数に拡張することができますが，

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

実部が1より大きい範囲のみで収束するため，
それ以外の範囲では定義できません．

一致の定理

Dを領域，$f, g : D \to \mathbb{C}$を正則関数とする
D上のある収束列$\{z_i\}$が存在して
任意の$i \in \mathbb{N}$に対して$f(z_i) = g(z_i)$ならば$f = g$である

複素関数の世界では，一致の定理が成り立っています．

D_1, D_2を領域，$U \subset D_1 \cap D_2$を空でない領域とし
$f_1 : D_1 \to \mathbb{C}, f_2 : D_2 \to \mathbb{C}$を正則関数とする
f_2がf_1のD_2への解析接続 $\iff f_1|_U = f_2|U$

そのため，このような解析接続を行うことができます．

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^s - 1}\,dt$$

具体的には，ゼータ関数とガンマ関数の積を考えて，

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1}\, dz$$

ハンケル積分路をとり，ゼータ関数をこのように表示することができます．

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

このとき，ゼータ関数の関数等式が得られます．

$$\zeta(s) = 0$$

このゼータ関数の零点を考えてみましょう.

$$\zeta(-2n) = 0$$

まず，負の偶数は零点になります．

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

$$\Big\downarrow \; s = -2n$$

$$\zeta(-2n) = 0$$

これは，先ほどの関数等式を用いることで，直ちに確認できます．

$$\zeta(s) = 0$$

次に，負の偶数以外の零点について考えてみましょう．

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \gamma(1-s) \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n^{1-s}} + R(s)$$

リーマン・ジーゲルの公式などを用いて，いくつか計算してみると，

$$\frac{1}{2} + i14.1347\cdots$$

$$\frac{1}{2} + i21.0220\cdots$$

$$\frac{1}{2} + i25.0108\cdots$$

驚くべきことに，これらの零点は，すべて実部が$1/2$になっています!

リーマンゼータ関数の零点は
負の偶数か実部が$\dfrac{1}{2}$の複素数である

するとこのような予想を考えるのが自然です．

リーマン予想

リーマンゼータ関数の零点は
負の偶数か実部が$\dfrac{1}{2}$の複素数である

これこそが，現代数学の重要な未解決問題である，リーマン予想です！

リーマン予想

素数

このリーマン予想は，素数と密接に関係しています．

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\,:\,\text{素数}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

その理由が，リーマンゼータ関数のオイラー積表示です．

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{\boxed{p\text{：素数}}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

前置きが長くなってしまいましたが，リーマンゼータ関数は，
素数に関する無限積で表すことができます．

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

まず，リーマンゼータ関数を考えましょう．

$$\frac{1}{2^s}\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s}$$

両辺に$1/2^s$を掛けると，このようになります．

$$
\begin{array}{lrl}
 & \zeta(s) = & 1 + \dfrac{1}{2^s} + \dfrac{1}{3^s} + \dfrac{1}{4^s} + \dots \\
-) & \dfrac{1}{2^s}\zeta(s) = & \phantom{1+{}} \dfrac{1}{2^s} \phantom{+\dfrac{1}{3^s}} + \dfrac{1}{4^s} + \dots \\
\hline
 & \left(1 - \dfrac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = & 1 \phantom{+\dfrac{1}{2^s}} + \dfrac{1}{3^s} \phantom{+\dfrac{1}{4^s}} + \dots
\end{array}
$$

引き算するとこのようになり，

分母が偶数のs乗である項が，右辺から消えました．

$$\frac{1}{3^s}\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s)=\frac{1}{3^s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^s}$$

同様に，$1/3^s$を掛けた式を用意し，

$$\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s)=1+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{9^s}+\cdots$$

$$-)\quad \frac{1}{3^s}\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s)=\frac{1}{3^s}+\frac{1}{9^s}+\cdots$$

$$\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\zeta(s)=1+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\cdots$$

引き算することで，分母が3の倍数のs乗である項も消すことができます．

$$\zeta(s) \prod_{p\,:\,\text{素数}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = 1$$

これをすべての素数に対して行うことで，右辺は1になり，

$$\zeta(s) = \prod_{p:\text{素数}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

オイラー積表示を与えることができるのです．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \prod_{p\,:\,\text{素数}} \frac{a_p}{1-\dfrac{1}{p^s}}$$

オイラー積表示は，リーマンゼータ関数の一般化に当たる，
ディリクレ級数に対して行うことができます．

ウォリスの公式

最後に，ウォリスの公式について解説します．

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi}{2}$$

ウォリスの公式は，円周率に関する無限積の等式です．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\, dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & (n\text{が奇数}) \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \dfrac{\pi}{2} & (n\text{が偶数}) \end{cases}$$

まず，ウォリス積分を考えます．

これは，部分積分を繰り返すことにより，求めることができます．

$$\sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x \leq \sin^{2n-1} x$$

$\sin$ は 0 と 1 の間の値を取るので，この不等式が成り立ちます．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x\,dx$$

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

したがって，ウォリス積分についても，同様の不等式が成り立ち，

$$1 \leq \frac{(2n-1)!!(2n+1)!!}{((2n)!!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{2n+1}{2n}$$

この不等式を得ます．

$$\frac{2n+1}{2n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

最右辺について考えると，これは1に収束するため，

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(2n-1)!!(2n+1)!!}{((2n)!!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = 1$$

はさみうちの原理より，この極限が求まります．

$$\frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}=1$$

したがって，この等式が得られるので，

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi}{2}$$

ウォリスの公式を示すことができました.

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

ところで，オイラーがバーゼル問題を解くときに用いた，
この無限積を思い出すと，

$$1 = \frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$$

この等式で，zに$\pi/2$を代入するだけで，

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi}{2}$$

ウォリスの公式が得られます．

3. 無限回の掛け算

1.無限積とは
2.ワイエルシュトラスの因数分解定理
3.オイラー積
4.ウォリスの公式

複素関数の話題が目立ちましたが，
無限積の世界の奥深さを，ご堪能いただけたのではないでしょうか．

MathAbyss

[illegible]

4. 無限回の冪乗

4. 無限回の冪乗

1.テトレーションとは
2.指数タワー
3.超冪根と超対数
4.ハイパー演算

4. 無限回の冪乗

1.テトレーションとは
2.指数タワー
3.超冪根と超対数
4.ハイパー演算

3つ目は，冪乗を無限回行うとどうなるのかについて，考えてみましょう．

テトレーションとは

まずは，新しい演算の定義から始めましょう．

$$a > 0 \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

aを正の実数，nを非負整数とします．

$$an = \underbrace{a + \cdots + a}_{n}$$

四則演算の1つである加法を繰り返し行うと，
乗法を定義することができます．

$$a^n = \underbrace{a \cdots a}_{n}$$

そして，乗法を繰り返し行うと，冪乗を定義することができます．

$$ {}^{n}a = \underbrace{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}_{n} $$

そこで，冪乗を繰り返し行うことによって，
新たな演算を定義してみましょう．

$$\begin{cases} {}^{0}a = 1 \\ {}^{n}a = a^{\left({}^{n-1}a\right)} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$$

より厳密には，このように定義されます．

$$\begin{cases} {}^{0}a = 1 \\ {}^{n}a = a^{\left({}^{n-1}a\right)} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$$

この演算をテトレーションといいます．

$$ {}^{n}a = \underbrace{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}_{n} $$

ただし，冪乗の計算は右側から行うことに注意してください．

$$
\begin{aligned}
(a+bi)+(c+di) =&(a+c)+(b+d)i\\
(a+bi)(c+di) =&(ac-bd)+(ad+bc)i\\
z^w =&e^{w\log z}
\end{aligned}
$$

さて，加法や乗法，冪乗は，複素数の範囲にまで拡張することができます．

$$z^{w} = e^{w \log z}$$

冪乗について補足しておきましょう.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

指数関数は，このような級数で表すことができます．

$$e^{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{n}$$

この級数の収束半径は∞で，任意の複素数に対して収束します．

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

そこで，この式で複素指数関数を定義することができます．

↓実関数としての自然対数

$$\log z = \boxed{\log|z|} + i \arg z$$

一方で，複素対数関数はこのように定義されます．

偏角の取り方に依存する↓

$$\log z = \log |z| + i \boxed{\arg z}$$

複素数の偏角の取り方は一意に定まらないため，
複素対数関数はそれによって決まる多価関数となります．

$$z^{w} = e^{w \log z} \qquad (z, w \in \mathbb{C})$$

そして，複素数の複素数乗はこのように定義されるため，
一般には多価関数となります．

$$\operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi]$$

偏角の範囲をこのように制限すると，値は一意に定まります．
このときの値は主値と呼ばれます．

$$z^w = e^{w \log z} \qquad (z, w \in \mathbb{C})$$

これで，複素数の冪乗計算が定義できました．

$$
{}^{n}a = \underbrace{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}_{n}
$$

話を戻して，テトレーションを複素数の範囲に拡張してみましょう．

$$\lim_{a \to +0} {}^{n}a = \begin{cases} 1 & (n\text{が偶数}) \\ 0 & (n\text{が奇数}) \end{cases}$$

このような極限計算を元にして，

$$ {}^{n}0 = \begin{cases} 1 & (n\text{が偶数}) \\ 0 & (n\text{が奇数}) \end{cases} $$

0のテトレーションを定義することができます．

$$
{}^{n}0 = \begin{cases} 1 & (n\text{が偶数}) \\ 0 & (n\text{が奇数}) \end{cases}
$$

ここで，0^0は一般に定義されませんが，
0のテトレーションはx^xの極限を元に定義されるため，
1として定めていることに注意してください．

$$ {}^{n}z = z^{z^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{z}}}}} $$

一般の複素数のテトレーションは，
複素数の冪乗計算を元に定義することができます．

$$\begin{cases} {}^{0}z = 1 \\ {}^{n}z = z^{\left({}^{n-1}z\right)} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$$

より厳密にはこのようになります．

$$\begin{cases} {}^{0}z = 1 \\ {}^{n}z = z^{\left({}^{n-1}z\right)} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$$

ただし，複素数の冪乗は主値を考えることにします．

$$ {}^{n}a = \underbrace{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}_{n} $$

これで，底を複素数に拡張することができたので，
次に高さを拡張していきます．

$$^{n}a = a^{\left({}^{n-1}a\right)}$$

テトレーションの漸化式から，

$$\log_a {}^{n}a = {}^{n-1}a$$

両辺の対数を取ることで，このような漸化式が得られるので，

$$ {}^{-1}a = \log_a {}^{0}a = \log_a 1 = 0 $$

これにより，
高さが-1であるテトレーションを定義することができます．

$$f(0)=1,\ f(-1)=0$$
$$f(x+1)=a^{f(x)}$$

そして，高さを複素数に拡張するために，
これらの条件を満たす関数を見つけ，
それを元に定義することになるのですが，

$$f(0)=1,\ f(-1)=0$$
$$f(x+1)=a^{f(x)}$$

この関数方程式を満たす関数は一意に定まりません．

$$f(0)=1,\ f(-1)=0$$
$$f(x+1)=a^{f(x)}$$

そこで，微分可能性や正則性などを条件に加えて拡張していくのですが，
これには大きな問題があります．

$$f(0)=1,\ f(-1)=0$$
$$f(x+1)=a^{f(x)}$$

$$f_1 \qquad\qquad f_2$$

それは，どのような条件を考えるかによって，
異なる拡張が得られてしまうということです．

$$f(0) = 1,\ f(-1) = 0$$
$$f(x+1) = a^{f(x)}$$

$$f_1 \qquad\qquad f_2$$

どの拡張を考えるのが最も自然なのかについては，
まだ議論の余地がある状態なのです．

指数タワー

次に，高さが無限大のテトレーション，
いわゆる指数タワーについて解説します．

$$^{\infty}a = a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

テトレーションの高さを無限大にすると，どうなるでしょうか．

$$\lim_{n\to\infty} {}^{n}a = {}^{\infty}a$$

つまり，この極限を考えることになるのですが，収束性が問題になります．

$$e^{-e} \leq a \leq e^{\frac{1}{e}}$$

底が実数の場合，極限が収束する範囲はこのようになります．

Leonhard Euler
(1707-1783)

これはオイラーによって証明されました．

$$^{\infty}a = a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

では，この無限テトレーションの値はどうなるのでしょうか．

$$z = W(z)e^{W(z)}$$

ここで，ランベルトのW関数を考えます．

ランベルトのW関数は，この等式を満たす複素関数として定義されます．

$$x = a^x$$

$$\left(x = {}^{\infty}a\right)$$

無限テトレーションが収束するとき，この等式が成り立つので，

$$xa^{-x} = 1$$

両辺にa^{-x}を掛けると，この等式を得ます．

$$xe^{-x\log a} = 1$$

冪乗の底をeに変換して，

$$\boxed{-x\log a}\cdot e^{\boxed{-x\log a}} = -\log a$$

両辺に$-\log a$を掛けると，ランベルトのW関数の形が現れるので，

$$W(-\log a) = -x \log a$$

この等式を得ます．

$$x = \frac{W(-\log a)}{-\log a} \quad (a \neq 1)$$

したがって，無限テトレーションの値を底を用いて表すことができました．

超冪根と超対数

次に，テトレーションの逆操作を考えてみましょう．

$$a^b = c$$

冪根

対数

$$\sqrt[b]{c} = a \qquad \log_a c = b$$

冪乗では，冪根と対数という，2つの逆操作を考えることができます．

$$ {}^{b}a = c $$

$$ \sqrt[b]{c}_s = a \qquad \mathrm{slog}_a c = b $$

同様に，テトレーションについても，
2つの逆操作を考えることができそうです．

$$\sqrt[b]{c}_s = a$$

テトレーションの底を求める逆操作として，超冪根があります．

$$\sqrt[b]{c}_s = a$$

用語の注意をしておくと，ここでの超冪根は，
5次方程式の解の公式などで取り上げられる超冪根とは異なる概念です．

$$\sqrt{x}_s$$

まず，高さが2の場合の超冪根，いわゆる超平方根について考えましょう．

$$ {}^{2}a = a^{a} = x $$

高さ2のテトレーションは，このような形をしています．

$$a \log a = \log x$$

両辺の対数をとり，

$$e^{\boxed{\log a}}\boxed{\log a} = \log x$$

eを無理やり出現させると，ランベルトのW関数の形が現れます．

$$W(\log x) = \log a$$

よって，この等式が得られるので，

$$a = e^{W(\log x)} = \frac{\log x}{W(\log x)}$$

aをxの関数として表すことができました．

$$\sqrt{x}_s = e^{W(\log x)} = \frac{\log x}{W(\log x)}$$

この関数が超平方根になります．

$$\sqrt{x}_s = e^{W(\log x)} = \frac{\log x}{W(\log x)}$$

超平方根はランベルトのW関数を用いて表すことができますが，
一般の場合はそうは行きません．

$$\sqrt[\infty]{x}_s$$

ただし，高さが無限大の場合の超冪根については，
簡単に表すことができます．

$$a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = x$$

無限テトレーションが収束するとき，

$$a^x = x$$

この等式が成り立つので，

$$\sqrt[\infty]{x}_s = a = x^{\frac{1}{x}}$$

無限次超冪根の表示が得られます．

$$^{n}a = x$$

$$\Updownarrow$$

$$\operatorname{slog}_a x = n$$

また，テトレーションの高さを求める逆操作として，
超対数を定義することができます．

$$\log^* n = \begin{cases} 0 & (n \leq 1) \\ 1 + \log^*(\log n) & (n > 1) \end{cases}$$

超対数は，計算機科学において，反復対数として登場します．

ハイパー演算

最後に，超冪のさらなる拡張についてお話します．

$$b+1$$

まず，1を加えるという演算から出発します．

$$a + b = a + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{b}$$

この演算を繰り返すことによって，加法が定まります．

$$ab = \underbrace{a + \cdots + a}_{b}$$

そして，加法を繰り返すことによって，乗法が定まり，

$$a^b = \underbrace{a \ldots a}_{b}$$

乗法を繰り返すことによって，冪乗が定まります．

$$\mathrm{hyper}(a, n, b)$$

これらの演算はハイパー演算子として統一的に見ることができます．

$$\mathrm{hyper}(a, 0, b) = b + 1$$

最初の演算を0番目とし，

$$\mathrm{hyper}(a, 1, b) = a + b$$

$$\mathrm{hyper}(a, 2, b) = ab$$

$$\mathrm{hyper}(a, 3, b) = a^b$$

以降，加法を1番目，乗法を2番目，
冪乗を3番目のハイパー演算子として表すことができます．

$$\mathrm{hyper}(a, 4, b) = {}^{b}a$$

つまり，テトレーションは4番目のハイパー演算子となります．

$$\mathrm{hyper}(a,n,b)=\begin{cases} b+1 & (n=0) \\ a & (n=1, b=0) \\ 0 & (n=2, b=0) \\ 1 & (n\geq 3, b=0) \\ \mathrm{hyper}(a,n-1,\mathrm{hyper}(a,n,b-1)) & (\mathrm{otherwise}) \end{cases}$$

より一般の場合は，帰納的にこのように定義されます．

$$a^{b^{c}} = a^{\left(b^{c}\right)}$$

$${}^{{}^{c}b}a = {}^{\left({}^{c}b\right)}a$$

ハイパー演算子は，原則として右側から計算します．
加法や乗法については，結合法則と交換法則が成り立つため，
自由な順序で計算することができます．

$$a \uparrow^n b = \mathrm{hyper}(a, n+2, b)$$

この表記は少し長いので，よりシンプルに記述するために，
クヌースの矢印表記を導入しましょう．

$$a \uparrow b = a^b$$

3番目のハイパー演算子である冪乗は，このように表します．

$$a \uparrow\uparrow b = {}^{b}a$$

4番目のハイパー演算子であるテトレーションは，このように表します．

$$a \uparrow\uparrow\uparrow b = \underbrace{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}_{b}$$

すると，5番目のハイパー演算子は，このように表すことができます．

$$a \uparrow\uparrow\uparrow b = \underbrace{{}^{{}^{{}^{a}\cdot^{\cdot^{\cdot}}}a}a}_{b}$$

これはペンテーションと呼ばれています．

$$a \uparrow^{n} b = a \underbrace{\uparrow \cdots \uparrow}_{n} b$$

矢印の個数をこのように略記すると，よりシンプルな表現が得られます．

$$a \uparrow^n b = \begin{cases} 1 & (b=0) \\ a^b & (n=1) \\ a \uparrow^{n-1} (a \uparrow^n (b-1)) & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

一般に，クヌースの矢印表記は，このように帰納的に定義されます．

$$a \uparrow^n b \uparrow^n c = a \uparrow^n (b \uparrow^n c)$$

クヌースの矢印表記についても，
右側から計算することに注意してください．

$$G(n) = 3 \uparrow^{n} 3$$

クヌースの矢印表記で遊んでみましょう．

まず，このような関数を定義します．

$$G^{64}(4) = \underbrace{G(\cdots(G}_{64}(4))\cdots)$$

この関数を64回合成したものを，
4に作用させることによって得られる数はグラハム数と呼ばれており，

グラハムの定理

n次元超立方体の異なる2頂点を結ぶ直線を
2色で塗り分けるとき
ある$N \in \mathbb{N}$が存在して
$n \geq N$ならば
超立方体のある4頂点が存在して
2頂点を結ぶ直線はすべて同色となる

グラハムの定理を満たす最小の正の整数の上界を与える数として，
発見された巨大数です．

https://fanchung.ucsd.edu/ron/images/record.jpg

The highest number ever used in a mathematical proof is a bounding value published in 1977 and known as Graham's number. It concerns bichromatic hypercubes and is inexpressible without the special "arrow" notation, devised by Knuth in 1976, extended to 64 layers.

グラハム数は，数学の証明で使われたことのある最大の数として，
1980年にギネス世界記録として認定されました．

4. 無限回の冪乗

1.テトレーションとは
2.指数タワー
3.超冪根と超対数
4.ハイパー演算

無限テトレーションの収束範囲やグラハム数については，
ショート動画でも紹介する予定です．

MathAbyss

5. 無限回の冪根

5. 無限回の冪根

1.無限多重根号とは
2.ラマヌジャンの問題
3.ヴィエトの公式

5. 無限回の冪根

1.無限多重根号とは
2.ラマヌジャンの問題
3.ヴィエトの公式

4つ目は，冪根を無限回とるとどうなるのかについて，考えてみましょう．

無限多重根号とは

まずは，無限多重根号の定義から始めます．

$$\sqrt{c+\sqrt{c+\sqrt{c+\dots}}}$$

$$a_1 = \sqrt{c}$$

$$a_{n+1} = \sqrt{c+a_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

無限多重平方根は，このような数列の極限値として定義されます．

$$a_1 = \sqrt{c}$$

$$a_{n+1} = \sqrt{c + a_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

この数列の収束性を確認しましょう．

$$x^2 - x - c = 0$$

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$$

まず，この2次方程式の正の実数解をαとします．

$$a_1 = \sqrt{c} \leq \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2} = \alpha$$

αが数列の上界であることを帰納法によって示しましょう．

$n=1$のときは明らかです．

$$c + a_n \leq c + \alpha = \alpha^2$$

$a_n < \alpha$のとき，このような不等式が成り立つので，

$$a_{n+1} = \sqrt{c + a_n} \leq \alpha$$

両辺の平方根をとると，$a_{n+1} < \alpha$が得られました．

$$a_1 = \sqrt{c} \leq \sqrt{c + \sqrt{c}} = a_2$$

次に，単調増加性を帰納法によって示しましょう．

$n = 1$のときは明らかです．

$$\sqrt{c+a_n} \leq \sqrt{c+a_{n+1}}$$

$a_n \leq a_{n+1}$が成り立つとき，
両辺にcを加えて平方根をとると，この不等式が得られます．

$$a_{n+1} = \sqrt{c + a_n} \leq \sqrt{c + a_{n+1}} = a_{n+2}$$

数列の漸化式を思い出すと，

これは$a_{n+1} \leq a_{n+2}$に他ならないことが分かります．

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq \alpha$$

上に有界な単調増加数列は収束するので，この数列は収束します．

$$a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}$$

$$\downarrow n \to \infty$$

$$x = \sqrt{c + x}$$

この極限値をxとすると，この等式が成り立つので，

$$x^2 - x - c = 0$$

整理すると，2次方程式を得ます．

$$x^2 - x - c = 0$$

$$x = \alpha = \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}$$

$x > 0$に注意すると，xはαに一致することが分かります．

$$\sqrt{c+\sqrt{c+\sqrt{c+\cdots}}} = \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$$

よって，無限多重平方根の値を求めることができました．

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$$

ここで，5次方程式について考えてみましょう．

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$$
$$\downarrow$$
$$x^5 + px + q = 0$$

チルンハウス変換をうまく行うと，
すべての5次方程式はこの形で表すことができます．

ブリング·ジェラードの標準形

$$x^5 + px + q = 0$$

これをブリング·ジェラードの標準形といいます.

$$\left(\frac{x}{\sqrt[4]{-p}}\right)^5-\frac{x}{\sqrt[4]{-p}}-\frac{q}{p\sqrt[4]{-p}}=0$$

両辺を$-p^{5/4}$で割ると，このような式を得ます．

$$y=\frac{x}{\sqrt[4]{-p}},\ c=\frac{q}{p\sqrt[4]{-p}}$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt[4]{-p}}\right)^5-\frac{x}{\sqrt[4]{-p}}-\frac{q}{p\sqrt[4]{-p}}=0$$

変数をこのように定義して，

$$y^5 - y - c = 0$$

5次方程式を変形すると，このような式が得られます．

$$y = \sqrt[5]{c + y}$$

これは，無限多重5乗根の漸化式そのものです．

$$\sqrt[5]{c+\sqrt[5]{c+\sqrt[5]{c+\cdots}}}$$

よって，この無限多重根号が収束するとき，

$$y = \sqrt[5]{c + \sqrt[5]{c + \sqrt[5]{c + \cdots}}}$$

これは5次方程式の解の1つとなります．

$$y = \sqrt[5]{c + \sqrt[5]{c + \sqrt[5]{c + \cdots}}}$$

問題は，cが負の実数や虚数である場合です．

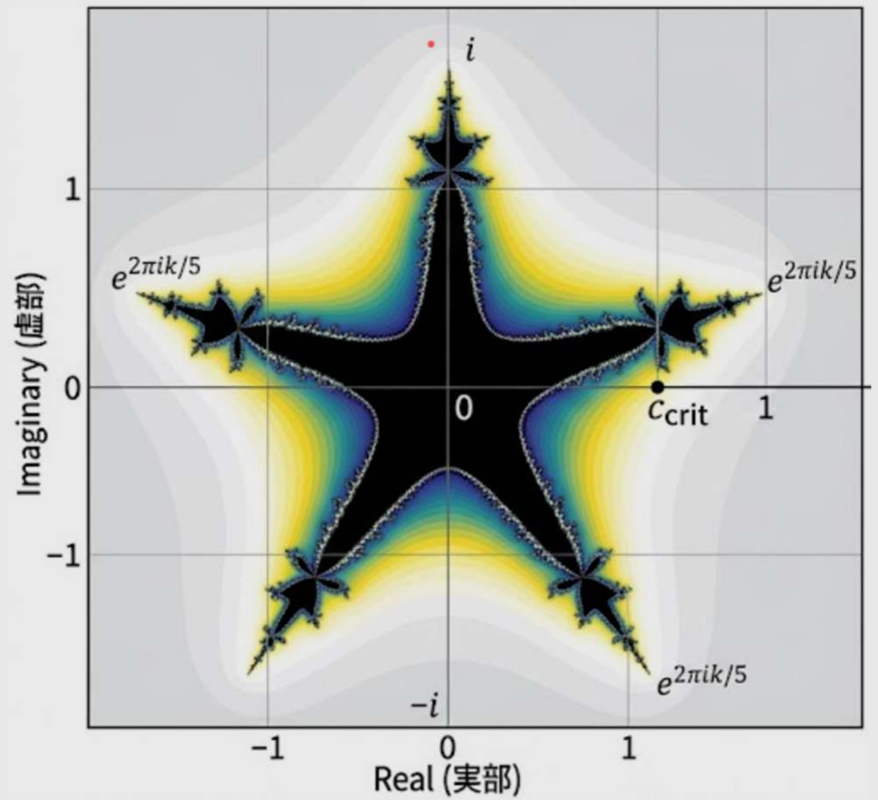
$$z^{\frac{1}{5}} = e^{\frac{1}{5}\operatorname{Log} z}$$

複素数の5乗根は複数考えられるので，主値を考えることにしましょう．

$$\sqrt[5]{z+\sqrt[5]{z+\sqrt[5]{z+\cdots}}}$$

このとき，先ほどの無限多重根号は収束するとは限りません．

※図は正確なものではありません



どのような場合に収束し，どのような場合に発散するのかを考えると，
フラクタルにたどり着きます．

ラマヌジャンの問題

続いて，無限多重根号の有名な等式を解説します．

$$3 = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + \cdots}}}$$

この等式は，ラマヌジャンが雑誌に掲載した問題です．
この等式が成り立つことを確かめてみましょう．

$$(x+n)^2 = 1 + (x+n-1)(x+n+1)$$

正の実数xと正の整数nに対して，この等式が成り立つので，

$$x + n = \sqrt{1 + (x + n - 1)(x + n + 1)}$$

両辺の平方根をとると，この等式が得られます．

$$x+1=\sqrt{1+x(x+2)}$$

$n=1$のときの等式から出発して，

$$x+1=\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)(x+3)}}$$

ルートの中に$n=2$の等式を代入してみましょう．

$$x+1=\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)(x+4)}}}$$

この操作を繰り返すと，

$$x+1=\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{1+\cdots}}}}$$

このような無限多重根号の等式を得ます．

$$3=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots}}}$$

xに2を代入することで，先ほどの等式を導くことができました．

ヴィエトの公式

無限多重根号とは少しずれるかもしれませんが，
ヴィエトの公式についても証明してみましょう．

$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots$$

ヴィエトの公式は，円周率に収束する，多重根号についての無限積です．

$$\sin x = 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}$$

まず，三角関数の2倍角の公式から出発します．

$$\sin x = 4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\sin\frac{x}{4}$$

2倍角の公式を繰り返し適用すると，

$$\sin x = 2^n \sin \frac{x}{2^n} \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{x}{2^k}$$

この等式が得られます．

$$\prod_{k=1}^{n} \cos \frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$$

sinの式とcosの式で分けましょう．

$$\frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{\sin x}{x}$$

右辺の極限を計算すると，このようになるので，

$$\prod_{k=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{x}$$

無限積の値を求めることができました。

$$\prod_{k=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^{k+1}} = \frac{2}{\pi}$$

$\theta = \pi/2$とすると，このような等式を得ます．

$$\prod_{k=1}^{\infty} \boxed{\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}} = \frac{2}{\pi}$$

さて，あとはこの$\cos$の値を計算するだけです．

$$\cos\frac{\pi}{2^k} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}}{2}}$$

半角の公式を思い出すと，無限多重根号の数列と似た漸化式を得るので，

$$\cos\frac{\pi}{2^{k+1}} = \frac{\overbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2}}}}}^{k}}{2}$$

このような一般項を得ます．

$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots$$

したがって，ヴィエトの公式を得ることができました．

5. 無限回の冪根

1.無限多重根号とは
2.ラマヌジャンの問題
3.ヴィエトの公式

無限多重根号には，まだまだおもしろい話題があります．
メンバー限定動画では，無限多重根号についての
個人的な考察についてまとめていますので，ぜひ，ご覧ください!

MathAbyss

6. 無限回の分数計算

6. 無限回の分数計算

1.連分数とは
2.ペル方程式
3.解析的連分数

6. 無限回の分数計算

1.連分数とは
2.ペル方程式
3.解析的連分数

最後に，分数の無限個の入れ子構造について，考えてみましょう．

連分数とは

まずは，連分数についてお話したいと思います．

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \qquad \frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{e} \qquad \frac{\frac{a+\frac{b}{c}}{d}}{e}$$

分子や分母に分数が含まれる分数を，繁分数といいます．

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3}}}$$

整数+分数の形が繰り返された繁分数について考えてみます．

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}}$$

このとき，すべての分子が1であるものを，正則連分数といいます．

$$[a_0; a_1, a_2, a_3] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}}$$

正則連分数は，このような記号で表すことがあります．

$$[a_0;\overline{a_1,a_2}] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

特に，整数部分が循環するときは，
循環部分にオーバーラインを引いて表します．

$$[a_0; \overline{a_1, a_2}] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

このチャプターでは，
正則連分数のことを，単に連分数ということにします．

$$c,\, c+\frac{1}{c},\, c+\frac{1}{c+\frac{1}{c}},\, \cdots \qquad (c>0)$$

さて，このような連分数列を考えてみましょう．

$$a_1 = c$$

$$a_{n+1} = c + \frac{1}{a_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

この数列の漸化式は，このようになります．

$$a_1 = c$$

$$a_{n+1} = c + \frac{1}{a_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

この数列が収束することを確かめてみましょう．

$$\alpha = c + \frac{1}{\alpha}$$

数列が収束すると仮定すると，その極限値αはこの等式を満たすので，

$$\alpha = \frac{c + \sqrt{c^2 + 4}}{2}$$

このようになります．

$$
\begin{aligned}
|a_{n+2}-\alpha| &= \left|\left(c+\frac{1}{a_{n+1}}\right)-\left(c+\frac{1}{\alpha}\right)\right| \\
&= \frac{|a_{n+1}-\alpha|}{\alpha a_{n+1}} = \frac{|a_n-\alpha|}{\alpha^2 a_n a_{n+1}} = \frac{|a_n-\alpha|}{(c\alpha+1)(ca_n+1)} \\
&\leq \begin{cases} \dfrac{|a_2-\alpha|}{(c\alpha+1)^{\frac{n}{2}}} & (n\text{が偶数}) \\ \dfrac{|a_1-\alpha|}{(c\alpha+1)^{\frac{n+1}{2}}} & (n\text{が奇数}) \end{cases}
\end{aligned}
$$

数列の各項とαの差を上から評価すると，

$$
\begin{aligned}
|a_{n+2}-\alpha| &= \left|\left(c+\frac{1}{a_{n+1}}\right)-\left(c+\frac{1}{\alpha}\right)\right| \\
&= \frac{|a_{n+1}-\alpha|}{\alpha a_{n+1}} = \frac{|a_n-\alpha|}{\alpha^2 a_n a_{n+1}} = \frac{|a_n-\alpha|}{(c\alpha+1)(ca_n+1)} \\
&\leq \begin{cases} \dfrac{|a_2-\alpha|}{(c\alpha+1)^{\frac{n}{2}}} & (n\text{が偶数}) \\ \dfrac{|a_1-\alpha|}{(c\alpha+1)^{\frac{n+1}{2}}} & (n\text{が奇数}) \end{cases}
\end{aligned}
$$

このような不等式が得られます．

$$\begin{aligned}|a_{n+2}-\alpha| &= \left|\left(c+\frac{1}{a_{n+1}}\right)-\left(c+\frac{1}{\alpha}\right)\right| \\ &= \frac{|a_{n+1}-\alpha|}{\alpha a_{n+1}} = \frac{|a_n-\alpha|}{\alpha^2 a_n a_{n+1}} = \frac{|a_n-\alpha|}{(c\alpha+1)(ca_n+1)} \\ &\leq \begin{cases} \dfrac{|a_2-\alpha|}{(c\alpha+1)^{\frac{n}{2}}} & (n\text{が偶数}) \\ \dfrac{|a_1-\alpha|}{(c\alpha+1)^{\frac{n+1}{2}}} & (n\text{が奇数}) \end{cases} \xrightarrow{n\to\infty} 0\end{aligned}$$

右辺は0に収束するので，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

はさみうちの原理より，数列がαに収束することが分かります．

$$\alpha = c + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

この極限値αはこのように表すことができ，これを無限連分数といいます．

$$\alpha = c + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

任意の実数は，連分数で表すことができます．

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1)$$

まずは整数部分と小数部分に分け，

$$1+(\sqrt{2}-1)=1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

小数部分を分子が1の分数に無理やり変形すると，

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\ddots}}}}$$

この操作を繰り返すことにより，実数の連分数展開が得られます．

$$
\begin{aligned}
a &= bq_1 + r_1 \\
b &= r_1 q_2 + r_2 \\
r_1 &= r_2 q_3 + r_3 \\
&\vdots \\
r_{n=1} &= r_n q_n + 1
\end{aligned}
$$

ここで，ユークリッドの互除法を考えましょう．

$$
\begin{aligned}
a =& bq_1 + r_1 \\
b =& r_1 q_2 + r_2 \\
r_1 =& r_2 q_3 + r_3 \\
&\vdots \\
r_{n=1} =& r_n q_n + 1
\end{aligned}
$$

ユークリッドの互除法は，
2つの整数の最大公約数を求めるアルゴリズムであり，
有限回の操作で終了します．

$$\frac{a}{b} = q_1 + \frac{r_1}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{r_2}{r_1}} = \cdots = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots \, \cfrac{}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}$$

このプロセスを利用すると，有理数の連分数展開が得られます．

$$\frac{a}{b}=q_1+\frac{r_1}{b}=q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{r_2}{r_1}}=\cdots=q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{\ddots\,\cfrac{}{q_{n-1}+\cfrac{1}{q_n}}}}$$

つまり，有理数の連分数展開は，ユークリッドの互除法そのものであり，

$$\frac{a}{b} = q_1 + \frac{r_1}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{r_2}{r_1}} = \cdots = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots \, \cfrac{}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}$$

任意の有理数は，有限連分数で表すことができます．

$$\frac{a}{b}=q_1+\frac{r_1}{b}=q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{r_2}{r_1}}=\cdots=q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{\ddots\,\cfrac{}{q_{n-1}+\cfrac{1}{q_n}}}}$$

逆に，有限連分数は有理数ですから，

$$x\text{が有理数} \iff x\text{は有限連分数展開可能}$$
$$x\text{が無理数} \iff x\text{は無限連分数展開可能}$$

実数が有理数であることの必要十分条件が得られました.

ペル方程式

連分数の応用例を紹介しましょう．

$$x^2 - dy^2 = 1$$

dを平方数でない正の整数とするとき，
この不定方程式をペル方程式といいます．

$$x^2 - dy^2 = 1$$

ペル方程式の正の整数解について考えてみましょう．

$x^2 - 7y^2 = 1$

$$\sqrt{7} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\ddots}}}}} = [2; \overline{1, 1, 1, 4}]$$

まず，$d = 7$の場合を考えます．$\sqrt{7}$の連分数展開を考えましょう．

$x^2 - 7y^2 = 1$

$$\sqrt{7} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\ddots}}}}} = [2; \overline{1, 1, 1, 4}]$$

この無限連分数を途中で打ち切ると，$\sqrt{7}$に近い値の分数が得られます．

$x^2 - 7y^2 = 1$

$$2 + \frac{1}{1} = 3, \quad 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}} = \frac{5}{2}$$

$$2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{8}{3}, \quad 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}} = \frac{37}{14}, \cdots$$

具体的には，このようになります．

$x^2-7y^2=1$

$$3^2-7\cdot 1^2=2$$

$$5^2-7\cdot 2^2=-3$$

$$8^2-7\cdot 3^2=1$$

$$37^2-7\cdot 14^2=-3$$

この分子と分母に注目して，先ほどのペル方程式の左辺に代入すると，
ペル方程式の整数解を1組見つけることができました．

$x^2 - 13y^2 = 1$

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}} = [3; \overline{1, 1, 1, 1, 6}]$$

次に，$d = 13$の場合を考えます．同様に，$\sqrt{13}$の連分数展開を考えます．

$x^2 - 13y^2 = 1$

$$3+\frac{1}{1}=4,\quad 3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}=\frac{7}{2},\quad 3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}=\frac{11}{3},$$

$$3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}=\frac{18}{5},\quad 3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6}}}}}=\frac{119}{33},\dots$$

無限連分数を途中で打ち切って，$\sqrt{13}$の近似分数を求めます．

$x^2 - 13y^2 = 1$

$$4^2 - 13 \cdot 1^2 = 3$$

$$7^2 - 13 \cdot 2^2 = -3$$

$$11^2 - 13 \cdot 3^2 = 4$$

$$18^2 - 13 \cdot 5^2 = -1$$

$$119^2 - 13 \cdot 33^2 = 4$$

この分子と分母をペル方程式の左辺に代入して，計算してみます．

$x^2 - 13y^2 = 1$

$$
\begin{aligned}
4^2 - 13 \cdot 1^2 &= 3 \\
7^2 - 13 \cdot 2^2 &= -3 \\
11^2 - 13 \cdot 3^2 &= 4 \\
18^2 - 13 \cdot 5^2 &= -1 \\
119^2 - 13 \cdot 33^2 &= 4 \\
137^2 - 13 \cdot 38^2 &= -3 \\
256^2 - 13 \cdot 71^2 &= 3 \\
393^2 - 13 \cdot 109^2 &= -4 \\
649^2 - 13 \cdot 180^2 &= 1
\end{aligned}
$$

すると，やはりペル方程式の整数解が見つかりました．

$x^2 - 13y^2 = 1$

$$4^2 - 13 \cdot 1^2 = 3$$
$$7^2 - 13 \cdot 2^2 = -3$$
$$11^2 - 13 \cdot 3^2 = 4$$
$$18^2 - 13 \cdot 5^2 = -1$$
$$119^2 - 13 \cdot 33^2 = 4$$
$$137^2 - 13 \cdot 38^2 = -3$$
$$256^2 - 13 \cdot 71^2 = 3$$
$$393^2 - 13 \cdot 109^2 = -4$$
$$649^2 - 13 \cdot 180^2 = 1$$

これは偶然ではありません。

$$x^2 = dy^2 + 1 > dy^2$$

ペル方程式を変形すると，この不等式を得ます．

$$x > \sqrt{d}\,y$$

したがって，この不等式が成り立ちます．

$$(x+\sqrt{d}y)(x-\sqrt{d}y)=1$$

さて，ペル方程式の左辺を因数分解すると，

$$x - \sqrt{d}y = \frac{1}{x + \sqrt{d}y}$$

この等式を得ます．

$$\frac{x}{y} - \sqrt{d} = \frac{1}{y(x + \sqrt{d}y)}$$

両辺をyで割って，

$$0 < \frac{x}{y} - \sqrt{d} = \frac{1}{y(x+\sqrt{d}y)} < \frac{1}{2y^2\sqrt{d}} < \frac{1}{2y^2}$$

先ほどの不等式を適用すると，

$$\left|\sqrt{d}-\frac{x}{y}\right|<\frac{1}{2y^2}$$

このような不等式が成り立つことが分かります．

無理数αと互いに素な正の整数p, qに対して

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$$
が成り立つならば

$\dfrac{p}{q}$はαの連分数展開から得られる近似分数である

ここで，ルジャンドルによって示された，この定理を利用します．

$$\left|\sqrt{d}-\frac{x}{y}\right|<\frac{1}{2y^2}$$

この定理によって，x/yは$\sqrt{d}$の連分数展開の近似分数になっていることが分かりました．

$$\sqrt{7} = [2; \overline{1, 1, 1, 4}]$$

$$3, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \cdots$$

更に詳しく言うと，$\sqrt{7}$のように，循環周期mが偶数である場合，
$m-1$番目の近似分数が整数解を与え，

$$\sqrt{13} = [3; \overline{1, 1, 1, 1, 6}]$$

$$4, \frac{7}{2}, \frac{11}{3}, \frac{18}{5}, \frac{119}{33}, \frac{137}{38}, \frac{256}{71}, \frac{393}{109}, \frac{649}{180}, \cdots$$

$\sqrt{13}$のように，循環周期mが奇数である場合，

$2m-1$番目の近似分数が整数解を与えます．

$$\sqrt{13} = [3; \overline{1, 1, 1, 1, 6}]$$

$$4, \frac{7}{2}, \frac{11}{3}, \frac{18}{5}, \frac{119}{33}, \frac{137}{38}, \frac{256}{71}, \frac{393}{109}, \frac{649}{180}, \cdots$$

このように，連分数展開を用いることで，
ペル方程式の整数解を求めることができるのです．

解析的連分数

次に，関数の連分数表示について考えてみましょう．

$$c_0 + c_1 + c_1c_2 + c_1c_2c_3 + \dots$$

$$= c_0 + \cfrac{c_1}{1 - \cfrac{c_2}{1 + c_2 - \cfrac{c_3}{1 + c_3 - \cfrac{c_4}{1 + c_4 - \cfrac{c_5}{\ddots}}}}}$$

オイラーは，連分数に関するこの等式を証明しました．

$$
\begin{aligned}
&c_0 + c_1 + c_1 c_2 + c_1 c_2 c_3 + \dots \\
=&c_0 + \cfrac{c_1}{1 - \cfrac{c_2}{1 + c_2 - \cfrac{c_3}{1 + c_3 - \cfrac{c_4}{1 + c_4 - \cfrac{c_5}{\ddots}}}}}
\end{aligned}
$$

これを利用すると，様々な関数の連分数表示が得られます．

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

例えば，指数関数のテイラー展開はこのようになります．

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + z\frac{z}{2} + z\frac{z}{2}\frac{z}{3} + \dots$$

オイラーが示した等式を利用すると，

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + z\frac{z}{2} + z\frac{z}{2}\frac{z}{3} + \dots$$

$$= 1 + \cfrac{z}{1 - \cfrac{z/2}{1 + \cfrac{z}{2} - \cfrac{z/3}{1 + \cfrac{z}{3} - \cfrac{z/4}{1 + \cfrac{z}{4} - \cfrac{z/5}{\ddots}}}}}$$

指数関数の連分数表示は，このようになります．

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + z\frac{z}{2} + z\frac{z}{2}\frac{z}{3} + \dots$$

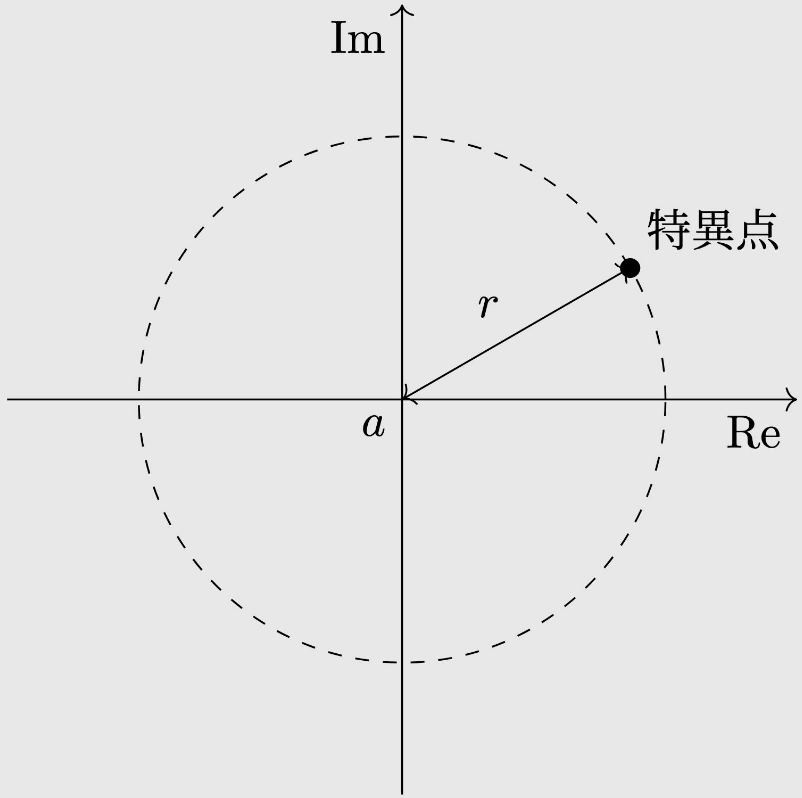
$$= 1 + \cfrac{z}{1 - \cfrac{z/2}{1 + \frac{z}{2} - \cfrac{z/3}{1 + \frac{z}{3} - \cfrac{z/4}{1 + \frac{z}{4} - \cfrac{z/5}{\ddots}}}}}$$

そもそも，関数の連分数表示を考えるメリットは何でしょうか?

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

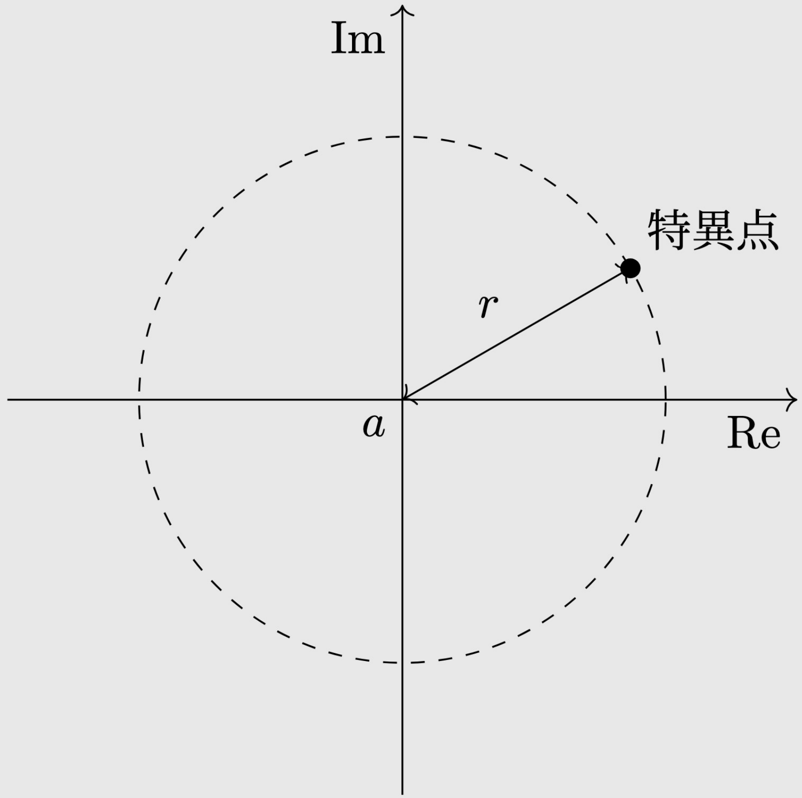
関数の冪級数表示では，収束半径が存在します．

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$



冪級数展開の中心と，中心から最も近い特異点の距離が，
収束半径になります．

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$



一方で，関数の連分数表示では，特異点が分母の零点として現れるため，より広い範囲で収束することがあります．

$$e^z \fallingdotseq 1+\cfrac{z}{1-\cfrac{z/2}{1+\frac{z}{2}-\cfrac{z/3}{1+\frac{z}{3}-\cfrac{z/4}{1+\frac{z}{4}}}}}$$

また，連分数を途中で打ち切ることで，
関数を有理関数で近似することができるというメリットもあります．

$$\frac{{}_2F_1\left(\begin{matrix}a+1,b\\c+1\end{matrix}\middle|\,z\right)}{{}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix}\middle|\,z\right)}=\cfrac{1}{1+\cfrac{d_1z}{1+\cfrac{d_2z}{1+\cfrac{d_3z}{\ddots}}}}$$

関数の連分数表示を求める方法として，
ガウスの連分数について紹介します．

$$(x)_n = \prod_{i=0}^{n-1}(x+i) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$$

まず，ポッホハマー記号を定義します．

2つの流儀がありますが，ここでは上昇階乗冪として定義します．

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \,\middle|\, z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \cdot \frac{z^n}{n!} $$

ポッホハマー記号によって定義されるこの超幾何級数を，
超幾何関数といいます．

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{が超幾何級数} \iff {}^\forall n \in \mathbb{N}, \frac{a_{n+1}}{a_n} \text{は} n \text{の有理関数}$$

超幾何級数とは，隣り合う項の比が有理関数である無限級数のことです．

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \,\middle|\, z\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \cdot \frac{z^n}{n!} $$

ガンマ関数を使うと，超幾何関数はこのように表すことができます．

$$\log(1+z) = z\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,1\\2\end{matrix}\,\middle|\,-z\right)$$

$$\arcsin z = z\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{1}{2},1\\\frac{3}{2}\end{matrix}\,\middle|\,z^2\right)$$

超幾何関数は，様々な関数を表現することができ，

$$ {}_rF_s\left(\begin{matrix} a_1, a_2, \ldots, a_r \\ b_1, b_2, \ldots, b_s \end{matrix} \,\middle|\, z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n \ldots (a_r)_n}{(b_1)_n (b_2)_n \ldots (b_s)_n} \cdot \frac{z^n}{n!} $$

一般化超幾何関数を用いると，
更に多くの関数を表現することができるようになります．

$$\frac{{}_2F_1\left(\begin{matrix}a+1,b\\c+1\end{matrix}\,\middle|\,z\right)}{{}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix}\,\middle|\,z\right)}=\cfrac{1}{1+\cfrac{d_1z}{1+\cfrac{d_2z}{1+\cfrac{d_3z}{\ddots}}}}$$

ガウスは，超幾何関数の比の連分数表示を突き止めました．

$$\frac{{}_2F_1\left(\begin{matrix}a+1,b\\c+1\end{matrix}\middle|\,z\right)}{{}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix}\middle|\,z\right)}=\cfrac{1}{1+\cfrac{d_1z}{1+\cfrac{d_2z}{1+\cfrac{d_3z}{\ddots}}}}$$

$$d_k=\begin{cases}\dfrac{(2a-2c-k+1)(2b+k-1)}{4(c+k)(c+k-1)} & (k\text{が奇数})\\[2ex] \dfrac{(2b-2c-k)(2a+k)}{4(c+k)(c+k-1)} & (k\text{が偶数})\end{cases}$$

ここで，分子はこのように計算されます．

$$\frac{{}_2F_1\left(\begin{matrix}a+1,b\\c+1\end{matrix}\,\middle|\,z\right)}{{}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix}\,\middle|\,z\right)}=\cfrac{1}{1+\cfrac{d_1z}{1+\cfrac{d_2z}{1+\cfrac{d_3z}{\ddots}}}}$$

これを利用すると，関数の連分数表示を求めることができます．

$$\log(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}z^n$$

まず，対数関数のマクローリン展開から出発します．

$$\frac{\log(1+z)}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^n$$

両辺を z で割ると，このようになります．

$$\frac{\log(1+z)}{z} = {}_2F_1\left(\begin{matrix}1, 1\\ 2\end{matrix}\middle| -z\right)$$

これは，超幾何関数で表すことができます．

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} 0, 1 \\ 1 \end{matrix} \middle| -z\right) = 1 $$

この超幾何関数の2つの変数をずらしたものは，1になります．

$$\frac{{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,1\\2\end{matrix}\middle|-z\right)}{{}_2F_1\left(\begin{matrix}0,1\\1\end{matrix}\middle|-z\right)}=\frac{\log(1+z)}{z}$$

よって，2つの超幾何関数の比は，このようになります．

$$\frac{{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,1\\2\end{matrix}\middle|-z\right)}{{}_2F_1\left(\begin{matrix}0,1\\1\end{matrix}\middle|-z\right)}=\cfrac{1}{1-\cfrac{d_1z}{1-\cfrac{d_2z}{1-\cfrac{d_3z}{1-\cfrac{d_4z}{\ddots}}}}}$$

ガウスの結果を用いると，これは連分数で表すことができます．

$$d_k = \begin{cases} -\dfrac{k+1}{4k} & (k\text{が奇数}) \\ -\dfrac{k}{4(k+1)} & (k\text{が偶数}) \end{cases}$$

分子を計算してみると，それぞれこのようになるので，

$$\frac{{}_2F_1\left(\begin{smallmatrix}1,1\\2\end{smallmatrix}\,\middle|\,-z\right)}{{}_2F_1\left(\begin{smallmatrix}0,1\\1\end{smallmatrix}\,\middle|\,-z\right)}=\cfrac{1}{1+\cfrac{z/2}{1+\cfrac{z/6}{1+\cfrac{z/3}{1+\cfrac{z/5}{\ddots}}}}}$$

先ほどの連分数表示は，このようになります．

$$\log(1+z) = \cfrac{z}{1 + \cfrac{z/2}{1 + \cfrac{z/6}{1 + \cfrac{z/3}{1 + \cfrac{z/5}{\ddots}}}}}$$

両辺にzを掛けて，

$$\cfrac{z}{1+\cfrac{1^2 z}{2+\cfrac{1^2 z}{3+\cfrac{2^2 z}{4+\cfrac{2^2 z}{\ddots}}}}}$$

分子の分母を払っていくと，

$$\log(1+z) = \cfrac{z}{1+\cfrac{1^2 z}{2+\cfrac{1^2 z}{3+\cfrac{2^2 z}{4+\cfrac{2^2 z}{\ddots}}}}}$$

最終的に，対数関数の連分数表示を得ることができました．

6. 無限回の分数計算

1.連分数とは
2.ペル方程式
3.解析的連分数

連分数の世界はとても豊かです．
連分数についての数学書はたくさんありますので，
興味を持たれた方は，ぜひ読んでみてください！

7. まとめ

今回の動画はここまでとなります．

とてもボリュームのある内容となりました．

未解決問題

最後に，未解決問題を紹介して終わりたいと思います．

7. まとめ

リーマン予想

リーマンゼータ関数の零点は

負の偶数か実部が$\dfrac{1}{2}$の複素数である

リーマン予想については紹介しましたが，
それ以外にも多くの未解決問題が存在します．

7. まとめ

アペリーの定数　$\zeta(3)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$

カタランの定数　$G=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$

例えば，アペリーの定数や，カタランの定数は，
超越数であると予想されていますが，証明されていません．
カタランの定数については，無理数であることすら証明されていません．

7. まとめ

アペリーの定数　$\zeta(3) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

アペリーの定数は，無理数であることが証明されており，
別動画でも取り上げました．

7. まとめ

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^{\pi}}\right) \qquad \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^{e}}\right)$$

また，この無限積の値が超越数であるかどうかも，分かっていません．

7. まとめ

$${}^{w}z$$

テトレーションについては，

高さを複素数に拡張する方法について議論されていますが，

7. まとめ

$${}^{n}\pi \qquad {}^{n}e$$

それ以外にも，このテトレーションが整数となることがあるのかどうかや，

7. まとめ

$$^{4}x = 2$$

テトレーションの方程式の解が無理数であるかどうかなどといった，シンプルな問題も未解決です．

7. まとめ

$$\sqrt{c+\sqrt{c+\sqrt{c+\cdots}}}$$

さらに，無限多重根号は，

収束条件について分かっていないことがたくさんあります．

7. まとめ

$$\sqrt{7} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\ddots}}}}} = \boxed{[2; \overline{1, 1, 1, 4}]}$$

循環している

そして，正の整数の平方根の連分数展開では，

現れる数字に規則性が見つかっていますが，

7. まとめ

$$\sqrt[3]{2} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}}$$

立方根の場合は，その規則性が見つかっていません．

7. まとめ

$$\infty$$

このように，無限の世界には，まだまだ分かっていないことがたくさんあり，解決される日を待っているのです．

MathAbyssでは，数学に関する記事を公開しているWebサイト
「MathAbyss」を運営しております．

この動画に対する高評価，YouTubeのチャンネル登録を
よろしくお願いします!
メンバーシップでは，動画の先行視聴や限定動画等の
特典をご用意しております!

各種SNS等のフォローもしていただけると励みになります！

最後までご視聴いただき，ありがとうございました！！！

MathAbyss

ご視聴ありがとうございました！
チャンネル登録よろしくお願いします！